CAPITOLO 3 – LA SCELTA RAZIONALE DEL CONSUMATORE

L'insieme delle possibilità di consumo è dato da tutte le combinazioni di beni che ad un dato prezzo sono simultaneamente acquistabili dal reddito disponibile del consumatore.

Ciascuna combinazione di beni è chiamata PANIERE. Se R^n è lo spazio di tutte le n tipologie possibili di beni, ogni punto in questo spazio rappresenta un paniere, le cui coordinate rappresentano la quantità di beni lungo quella specifica dimensione.

Quindi $x \in R^n = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ è un paniere, dove x_1 rappresenta le quantità del primo bene (p.e. le mele), x_2 rappresenta le quantità del secondo bene (p.e. le pere), e così via.

Ogni paniere ha un prezzo di acquisto dato dal considerare ogni quantità valutata al suo prezzo

$$P_{acquisto\,x} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Solo alcuni panieri avranno un prezzo compatibile con la disponibilità a spendere da parte del consumatore (che indichiamo con m=reddito spendibile).

Definiamo allora come **insieme opportunità** l'insieme dei panieri che sono accessibili al reddito del consumatore, ovvero che soddisfano

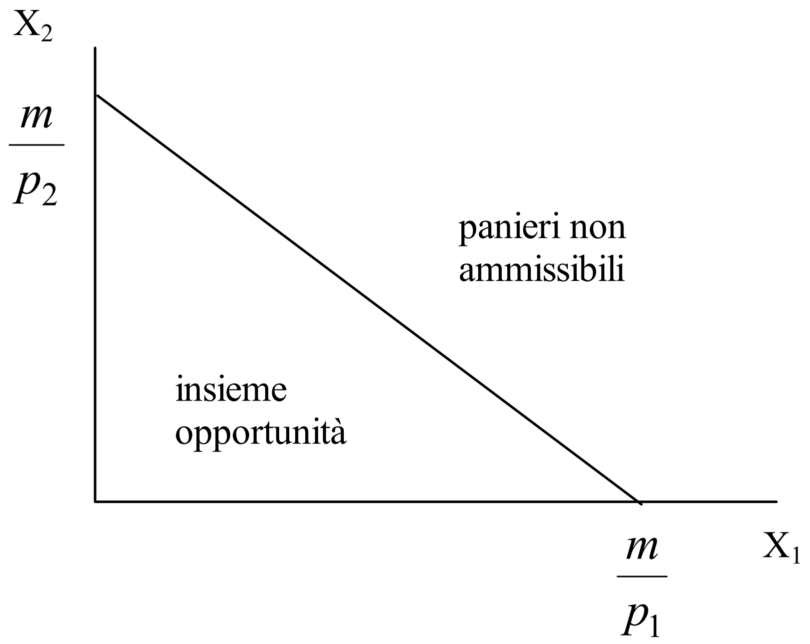
$$m \geq P_{acquisto\ x} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n$$

Nel caso di due soli beni la condizione diventa

$$m \geq p_1 x_1 + p_2 x_2$$

Si può rappresentare le combinazioni di beni che stanno sotto la retta

$$m = p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$$



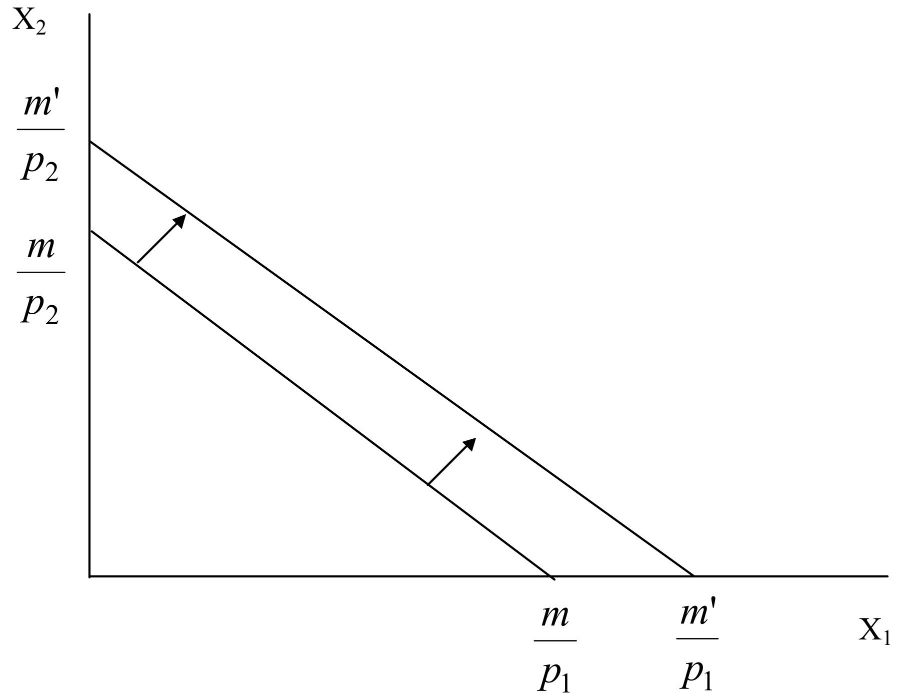
Si noti che le intercette coincidono con la situazione in cui tutto il reddito viene spese in uno solo dei due beni. Se m è il **reddito nominale**, $\frac{m}{p_1}$ è il **reddito reale** (in termini del bene 1), ovvero il potere d'acquisto di questo reddito.

La frontiera dell'insieme delle opportunità di consumo è chiamato **VINCOLO DI BILANCIO**.

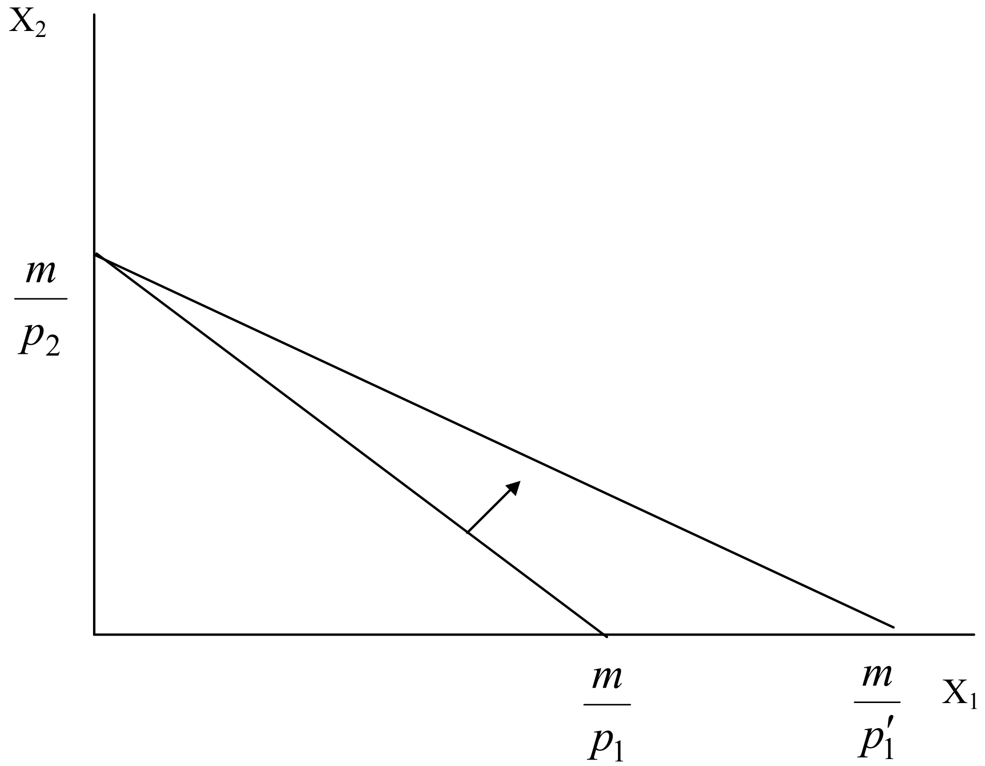
La pendenza del vincolo di bilancio, pari a $\frac{p_1}{p_2}$, è data dai prezzo relativo del bene 1 in rapporto al bene 2, ovvero ci dice quanto vale il bene 1 rispetto al bene 2 (cioè quante unità del bene 1 posso comprare quando rinuncio ad una unità del bene 2).

Il vincolo di bilancio varia al variare del reddito disponibile m o dei prezzi di acquisto (relativo) dei beni.

Un aumento del reddito spendibile $\Delta m > 0$ aumenta la dimensione dell'insieme opportunità.



Una riduzione del prezzo di acquisto di un bene (per esempio $\Delta p_1 < 0$) aumenta il potere d’acquisto del reddito spendibile principalmente lungo quella dimensione.



Una variazione di reddito e prezzi della stessa entità percentuale (per esempio un aumento di π per cento in periodo di inflazione) non modifica l'insieme opportunità. Infatti

$$m(1+\pi) = p_1(1+\pi)x_1 + p_2(1+\pi)x_2$$

$$\frac{m(1+\pi)}{1+\pi} = \frac{p_1(1+\pi)x_1}{1+\pi} + \frac{p_2(1+\pi)x_2}{1+\pi}$$

$$m = p_1x_1 + p_2x_2$$

Queste proprietà si estendono al caso di n beni. Si può sempre pensare che $(n-1)$ beni costituiscano un ipotetico bene composito (ovvero il reddito restante da spendere sugli altri beni, con prezzo unitario) che chiamiamo Y. In questo caso il vincolo di bilancio è

$$m = p_1x_1 + Y$$

Un ordinamento di preferenze è una relazione che supponiamo poter applicare a tutti i panieri esistenti. Essa consiste nel poter affermare che

$x \succ z$ (x è preferito a z)
oppure
$x \prec z$ (z è preferito a x)
oppure
$x \sim z$ (x e z sono indifferenti)

Questo ordinamento deve possedere 4 proprietà:

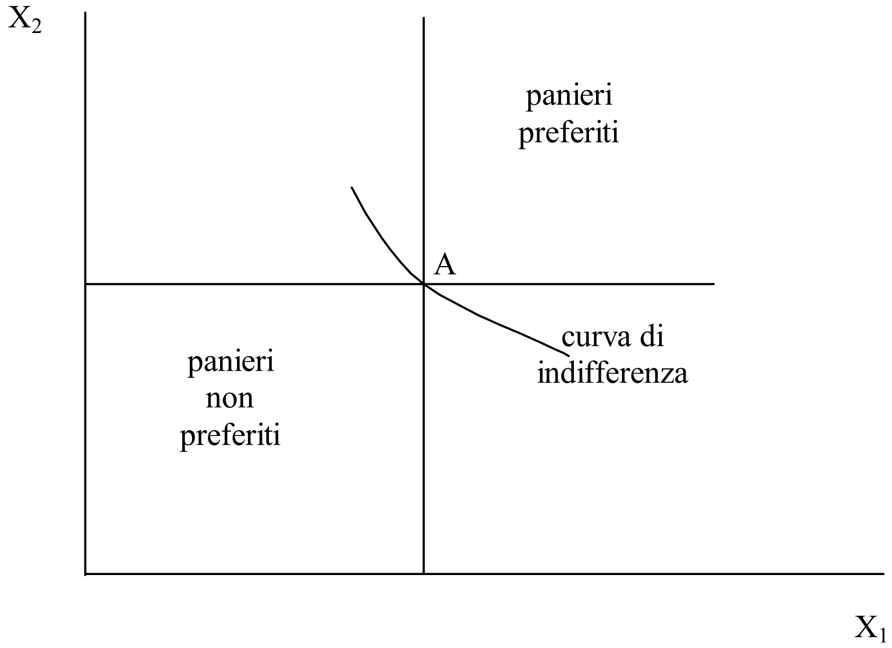
① **completezza** (saper classificare tutti i panieri)

② **transitività** (essere coerente nei propri giudizi): se $x \succ z$ e $z \succ w$ allora $x \succ w$

③ **non sazietà** (preferire sempre più a meno): se $y = x + \varepsilon$, allora $y \succ x$

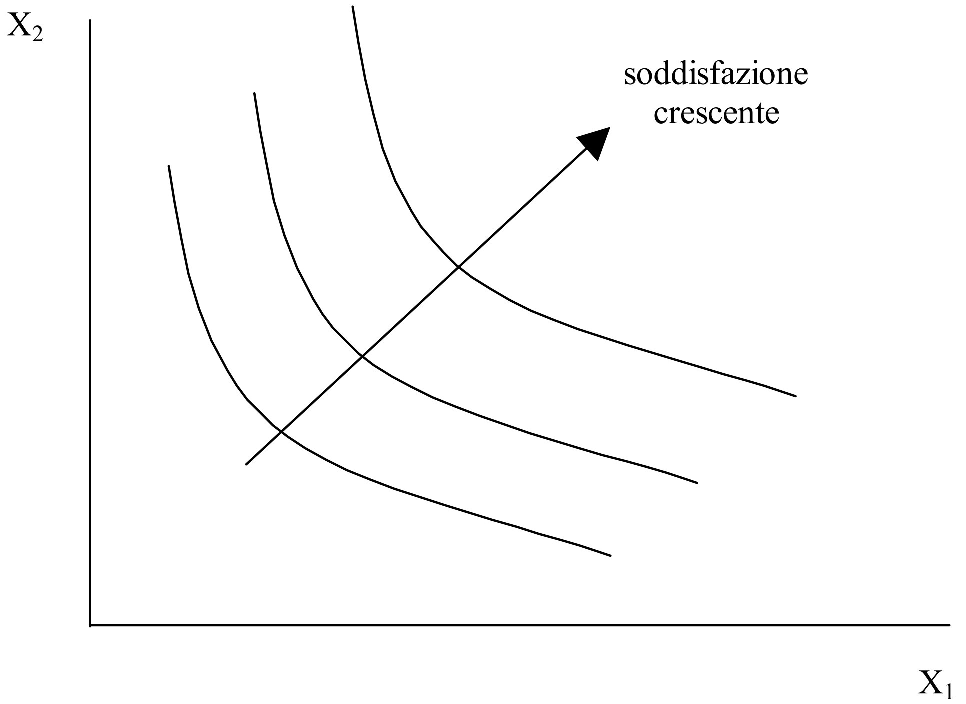
④ **convessità** (preferire le situazioni intermedie): se x e z sono due panieri e $w = \alpha x + (1 - \alpha) z$ è un paniere composto con porzioni dei panieri iniziali, allora $w \succ x$ e $w \succ z$.

Le preferenze possono essere rappresentate attraverso **curve di indifferenza**, che rappresentano le combinazioni di panieri che sono tra loro indifferenti.

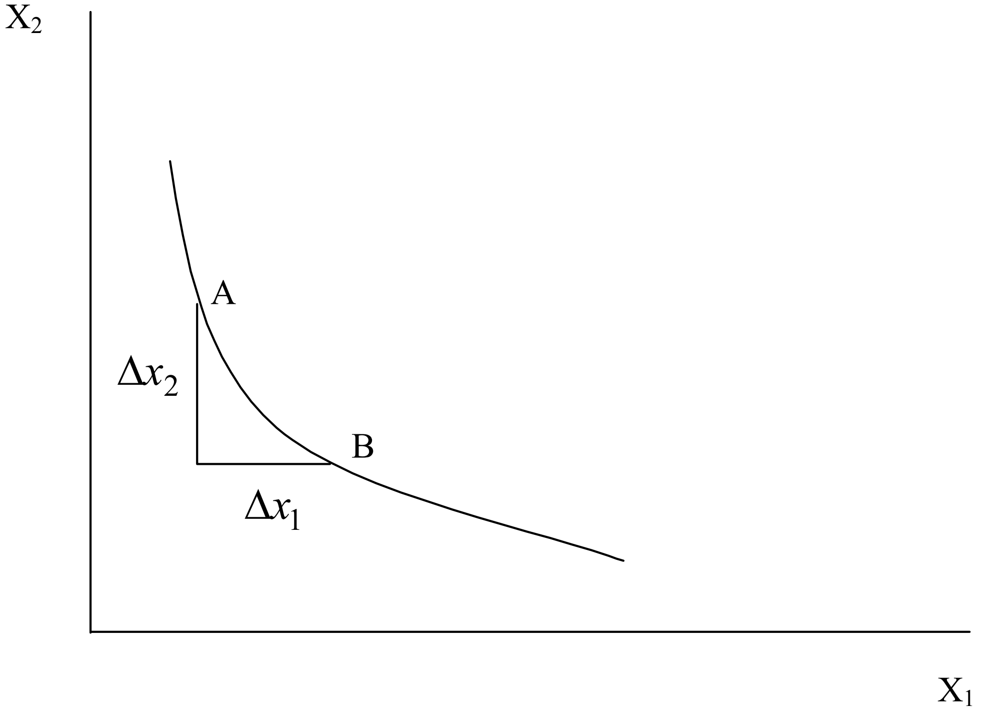


L'inclinazione di una curva di indifferenza ci informa sul rapporto di scambio

Possiamo avere una mappa delle preferenze attraverso un insieme di curve di indifferenza. Per la transitività e la non sazietà, le curve di indifferenza non si devono incrociare.

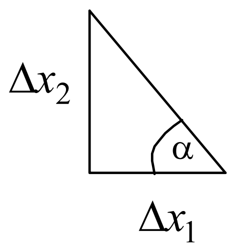


L'inclinazione di una curva di indifferenza ci informa sul rapporto di scambio soggettivo a cui l'individuo è disposto a scambiare i due beni per permanere in una situazione di egual soddisfazione.



Passare da **A** a **B** restando sulla stessa curva di indifferenza implica che $-\Delta x_2 = \Delta x_1$ (le due variazioni si equivalgono). Questo significa che 1 unità del bene x_1 vale $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ unità del bene x_2. Il rapporto $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ è un prezzo "soggettivo" e prende il nome di **SAGGIO MARGINALE DI SOSTITUZIONE (MRS)**.

Geometricamente il MRS è la pendenza (media tra **A** e **B**) della curva di indifferenza. Infatti $\dfrac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = tg(\alpha)$.



Se il MRS diminuisce lungo una curva di indifferenza, questo implica che il bene relativamente più abbondante è valutato meno.

Un MRS decrescente implica curve di indifferenza convesse verso l'origine.

Se valgono le prime tre proprietà sulle preferenze (completezza, transitività e non sazietà) è possibile immaginare una funzione di punteggio U (chiamata **funzione di utilità**) che ha la seguente proprietà:

$$x \succ z \quad \Leftrightarrow \quad U(x) > U(z)$$

Inoltre U è una funzione monotona

$$U(x+\varepsilon) > U(x)$$

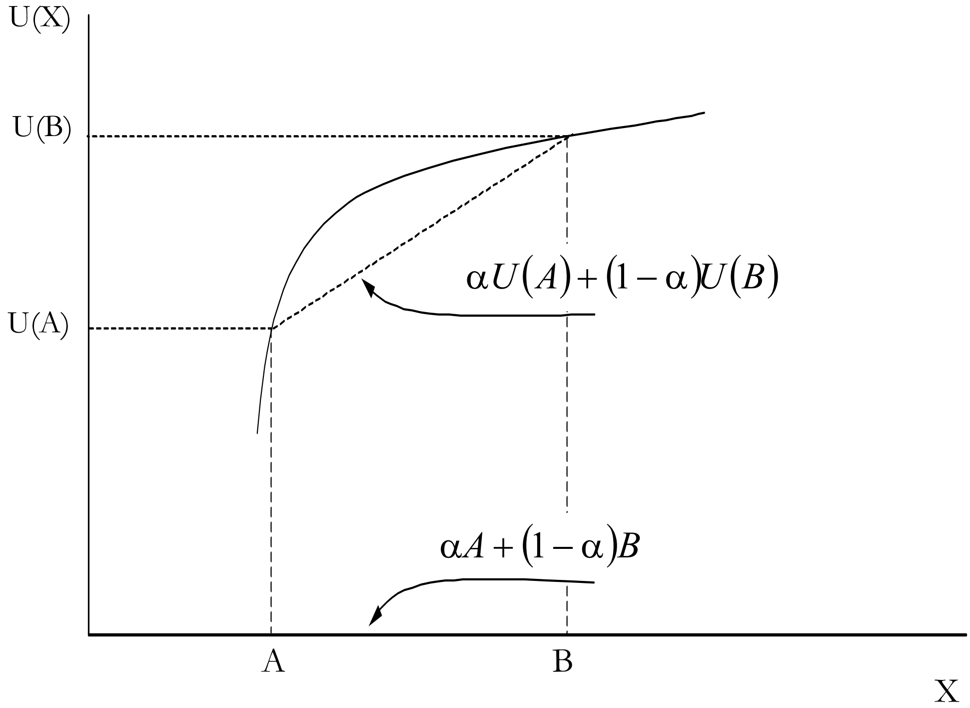
Ogni trasformazione della funzione di punteggio U (per esempio αU, $U+\beta$, $\log(U)$, U^2, ecc.) è a sua volta una funzione di punteggio perché non altera l'ordinamento dei panieri.

Infine U può essere funzione convessa se le preferenze sono caratterizzate dalla proprietà di convessità

$$U(\alpha x+(1-\alpha)z)>\alpha U(x)+(1-\alpha)U(z)$$

Allora una curva di indifferenza è la combinazione dei beni che assicura $U=$ costante.

$\alpha U(A)+(1-\alpha)U(B)$



Il MRS si ottiene dal differenziale totale della funzione di utilità $U(x_1, x_2)$:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2$$

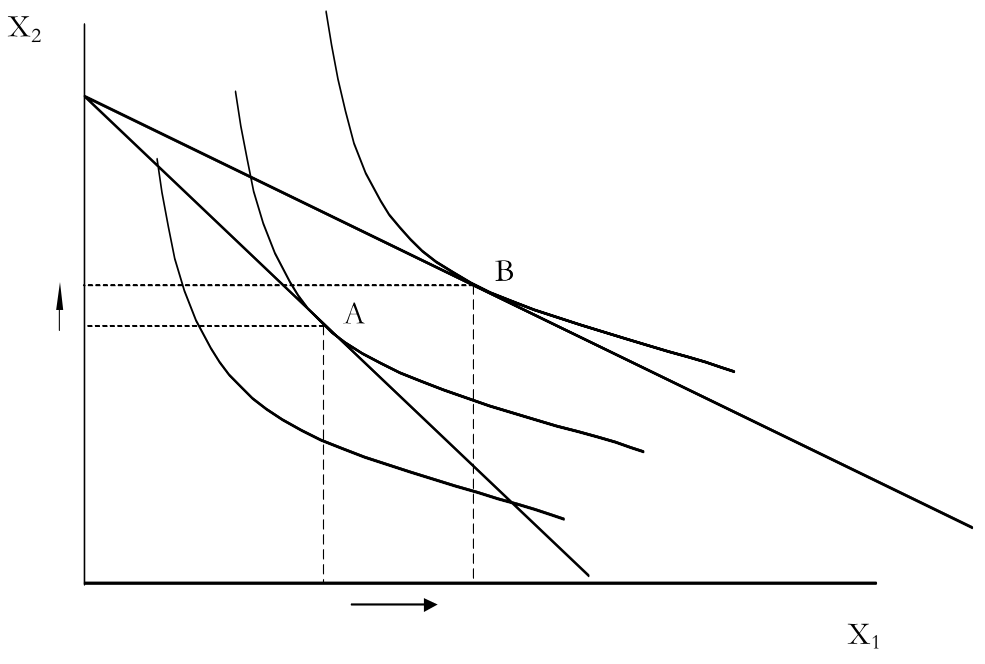
Lungo una curva di indifferenza $dU = 0$ ovvero

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = -\frac{\text{utilità marginale } x_1}{\text{utilità marginale } x_2} = \text{MRS}$$

La **scelta ottima** del consumatore è data dal punto associato alla curva di indifferenza più alta appartenente al vincolo di bilancio (=frontiera dell'insieme ammissibile).

Nel punto **A** il MRS è uguale a $\frac{p_1}{p_2}$, ovvero la valutazione soggettiva del consumatore coincide con quella oggettiva del mercato ⇨ non vi sono incentivi a cambiare scelta.

Se varia il vincolo di bilancio (per esempio p_1 diminuisce) cambia la scelta ottima (passaggio da **A** a **B).**



In modo più rigoroso formalmente, il consumatore risolve il seguente problema

$$\max_{x_1, x_2} U(x_1, x_2)$$

sotto il vincolo $p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$

Esprimendo il vincolo in termini di

$$x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$$

e sostituendo nella funzione massimizzanda otteniamo

$$\max_{x_1} U\left(x_1, \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1\right)$$

che rappresenta un problema di massimizzazione libera in una sola variabile.

Prendendo la derivata prima e azzerandola

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2}\left(-\frac{p_1}{p_2}\right) = 0$$

e risistemandola

$$\mathrm{MRS} = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

che è identica alla condizione geometrica di tangenza vista prima.

Essa può essere riscritta come

$$\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_1}}{p_1} = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_2}}{p_2}$$

che ci dice che il beneficio in termini monetari della scelta al margine di ciascun bene consumato deve essere identico.

Esempio: $U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{(1-\alpha)}$

Si tratta di una funzione di utilità di tipo esponenziale, che diventa lineare nei logaritmi. Infatti $\log(U) = \alpha \log(x_1) + (1-\alpha)\log(x_2)$. Viene ampiamente utilizzata in economia, e viene indicata col nome di "funzione Cobb-Duglas" dal nome degli economisti che per primi la hanno introdotta nella formalizzazione delle scelte economiche.

Calcolo il MRS e lo uguaglio ai prezzi

$$\text{MRS} = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{(1-\alpha)}}{(1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha}} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

Insieme al vincolo di bilancio questa condizione di tangenza ci permette di trovare le scelte ottime (sistema di due equazioni in due incognite, x_1 e x_2).

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{(1-\alpha)}\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{p_1}{p_2} \\ p_1x_1 + p_2x_2 = m \end{cases}$$

Esprimendo la prima condizione come

$$p_1x_1 = \frac{\alpha}{(1-\alpha)}p_2x_2$$

e sostituendo nella seconda trovo

$$\frac{\alpha}{(1-\alpha)}p_2x_2 + p_2x_2 = \frac{1}{(1-\alpha)}p_2x_2 = m$$

ovvero

$$x_2 = (1-\alpha)\frac{m}{p_2} = f(m, p_2)$$

e analogamente risostituendo nella condizione di tangenza

$$x_1 = \alpha \frac{m}{p_1} = f(m, p_1)$$

Questa è una proprietà generale delle funzioni di utilità esponenziali: la scelta ottima è associata ad una quota di spesa sul reddito costante. Infatti

$$\alpha = \frac{p_1 x_1}{m} \text{ e } (1-\alpha) = \frac{p_2 x_2}{m}$$

Questa proprietà è valida solo se la somma degli esponenti nella funzione esponenziale è pari ad 1. Alternativamente occorre trasformare la funzione di utilità per ricondurla a questo caso.

Se per esempio viene assegnata la funzione di utilità $U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta},\ \alpha + \beta \neq 1$, posso sempre immaginare una trasformazione della mia utilità che mi dia una funzione esponenziale con somma unitaria degli esponenti

$$V(x_1, x_2) = U^{\frac{1}{\alpha+\beta}} = x_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} x_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

e quindi le domande ottimali che ne conseguono sono date da

$$\frac{p_1 x_1}{m} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{m}{p_1}$$
$$\frac{p_2 x_2}{m} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \frac{m}{p_2}$$

Questa proprietà delle funzioni di utilità Cobb-Douglas è generale, e vale anche per il caso con n beni.