CAPITOLO 9 – LA PRODUZIONE

Cos'è un processo produttivo ?
È un processo che trasforma i fattori produttivi (materie prime, macchine, ore di lavoro umano, progettazione – genericamente indicati come ***inputs***) in risultati (prodotti vendibili sul mercato, beni intermedi, inquinamento – genericamente indicati come ***outputs***).

Gli inputs e gli outputs sono definiti come ***flussi***, cioè come erogazione di quantità fisiche per unità di tempo.

Anche le macchine o gli edifici (che rappresentano degli ***stocks***, in quanto misurano delle consistenze in un momento specifico) possono essere pensati come erogatori di "flussi di servizi" (esempio: il deperimento macchina).

Indichiamo con **X** l'insieme degli inputs e con $x \in \mathbf{X}, x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un suo generico elemento costituito dal vettore ordinato di tutti gli n inputs.

Indichiamo con **Y** l'insieme degli outputs e con $y \in \mathbf{Y}, y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ un suo generico elemento costituito dal vettore di tutti gli m outputs.

Allora il processo produttivo, cioè la relazione tra inputs e outputs, può essere descritto da una corrispondenza tra gli elementi di **X** e quelli di **Y**:

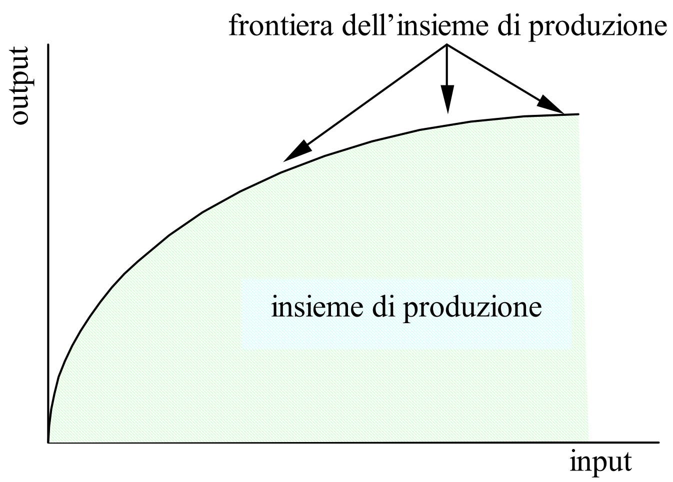
$$\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$$

Essa ci dice che il vettore $y \in \mathbf{Y}$ può essere prodotto a partire dal vettore $x \in \mathbf{X}$.

Possiamo fissare alcune proprietà di questa corrispondenza:

① **efficienza** (se non si può produrre più outputs con lo stesso ammontare di inputs, ovvero non si può produrre gli stessi outputs con minori quantità di inputs).

Come nel caso del vincolo di bilancio, questa proprietà ci porta sulla frontiera dell'insieme di produzione. Nel caso di un solo input e di un solo output si può visualizzarla così:



La **FUNZIONE DI PRODUZIONE** misura quindi il massimo livello di output che può essere ottenuto da un dato ammontare di inputs.

Come la funzione di utilità rappresenta un ordinamento di preferenze, così la funzione di produzione rappresenta uno stato della tecnologia.

Se la tecnologia ammette variazioni infinitesime degli inputs, allora la funzione di produzione deve godere della proprietà di

② **continuità** (si può variare infinitesimamente l'output variando infinitesimanente l'input)

Se la tecnologia ammette l'**eliminazione senza costo** (*free disposal*) degli input eccedenti, allora la funzione di produzione deve godere di

③ **monotonicità** (aumentando almeno un input l'output deve restare costante o aumentare)

Infine, se la tecnologia gode della proprietà di convessità (combinando due tecniche produttive che danno lo stesso livello di produzione deve essere possibile produrre almeno lo stesso livello di output), allora la funzione di produzione deve godere della proprietà di

④ **concavità** (aumentando anche un solo input l'output deve crescere, ma ad un ritmo progressivamente decrescente).

* * *

Noi tralasceremo il caso di più output (*produzioni congiunte*) e ci concentreremo su funzioni di produzione con un solo output Y e due inputs, *lavoro* L e *servizi da capitale* K. Assumeremo che tali funzioni godano di continuità, monotonicità e talvolta di concavità, e le indicheremo con

$$Y = f(L, K)$$

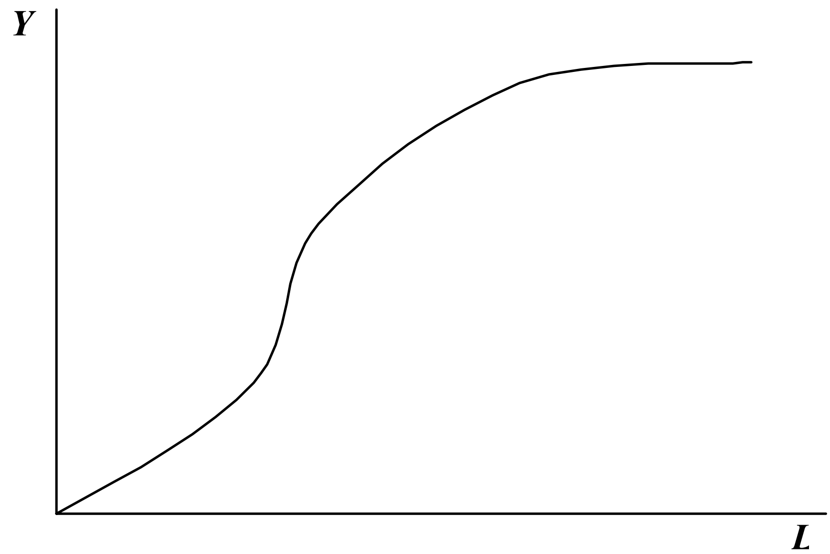
dove $(L, K) \in \mathbf{X}$, l'insieme degli inputs.

Distinguiamo tra BREVE PERIODO e LUNGO PERIODO a seconda che non sia o sia possibile modificare l'insieme di tutti gli inputs.

Nel breve periodo supponiamo che lo stock di capitale sia dato $K = \overline{K}$. Allora la quantità di produzione dipende dall'unico fattore variabile, il lavoro:

$$Y = f\left(L, \overline{K}\right) = F\left(L\right)$$

Essa può essere rappresentata geometricamente come



Dalla forma geometrica della funzione di produzione traiamo informazioni sulle caratteristiche tecniche del processo:

❶ la funzione di produzione parte dall'origine

$$F(0)=0$$

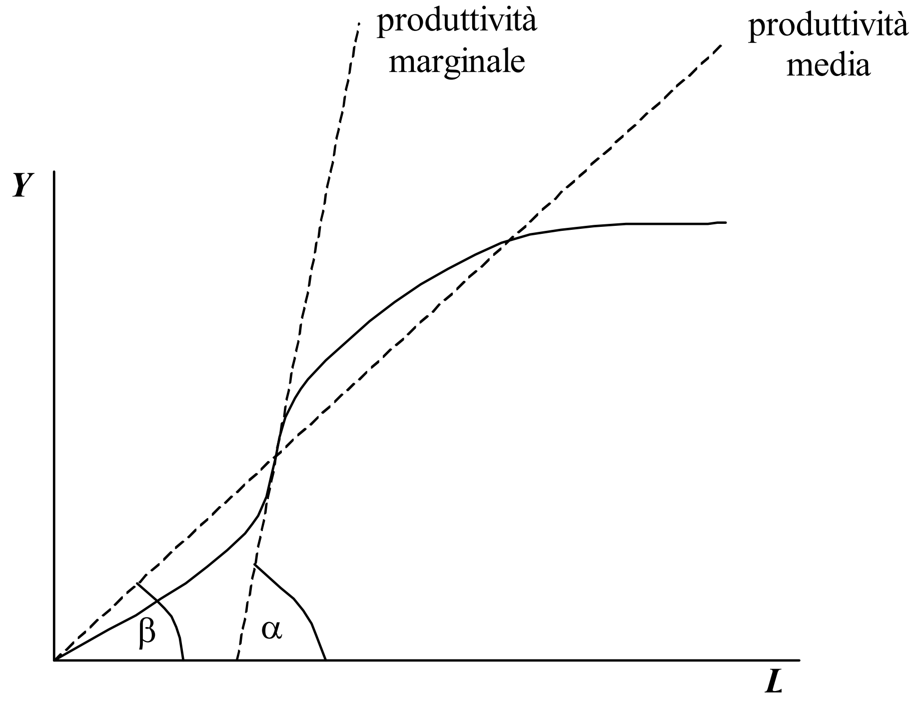
❷ se la funzione di produzione è strettamente concava, essa soddisfa la legge dei ***rendimenti marginali decrescenti***.

Consideriamo il rendimento (chiamato anche ***produttività***) dell'unico fattore variabile, il lavoro. Esso può essere misurato in due modi:

- $$\textit{produttività media} = \frac{Y}{L}$$

- $$\textit{produttività marginale} = \frac{\Delta Y}{\Delta L} \xrightarrow[\Delta L \to 0]{} \frac{dY}{dL}$$

Il primo corrisponde alla pendenza di un raggio che esce dall'origine, il secondo alla pendenza della funzione di produzione in un punto.



In analogia con l'elasticità della domanda di consumo al reddito, possiamo definire l'***elasticità della funzione di produzione*** (nei confronti del fattore lavoro) η_{YL} come rapporto tra produttività marginale $\frac{\Delta Y}{\Delta L}$ e produttività media $\frac{Y}{L}$.

Geometricamente può essere letta come $\eta_{YL} = \frac{\alpha}{\beta}$.

Notiamo che quando la produttività marginale **è maggiore** della produttività media (ovvero $\eta_{YL} > 1$), allora la produttività media aumenta: il contributo produttivo di ogni lavoratore aggiuntivo (*produttività marginale*) supera quello dei lavoratori preesistenti (*produttività media*).

Viceversa, quando la produttività marginale **è minore** della produttività media (ovvero $\eta_{YL} < 1$), la produttività media diminuisce.

Da questo ne deduciamo che la produttività media è massima quando la produttività media **è uguale** alla produttività marginale (ovvero $\eta_{YL} = 1$).

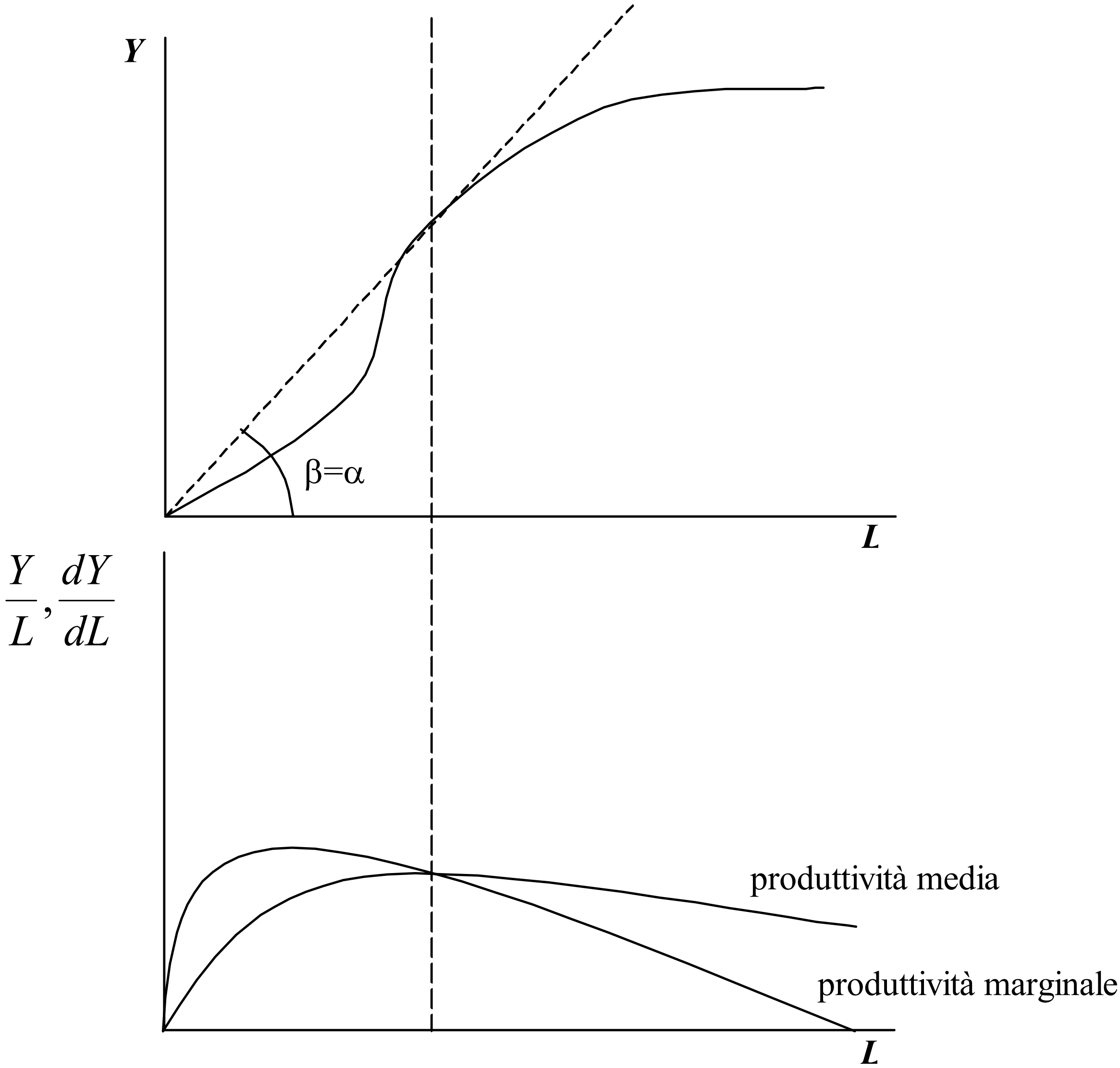
Più formalmente, si risolve il seguente problema

$$\max_L \frac{Y(L)}{L}$$

Ponendo uguale a zero la derivata prima

$$\frac{\frac{dY(L)}{dL}\cdot L - Y(L)}{L^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dY(L)}{dL} = \frac{Y(L)}{L}$$

che equivale al caso di $\eta_{YL} = \dfrac{\frac{dY(L)}{dL}}{\frac{Y(L)}{L}} = 1.$



Se la funzione di produzione da un certo punto in poi diviene concava, questo significa che da quel punto in avanti soddisfa la ***legge dei rendimenti marginali decrescenti***, ovvero che aumentare la quantità di un solo fattore tenendo fissi gli altri non conviene (esempio: aumentare il numero degli impiegati tenendo fissi il numero di computer e la stanza dove lavorano).

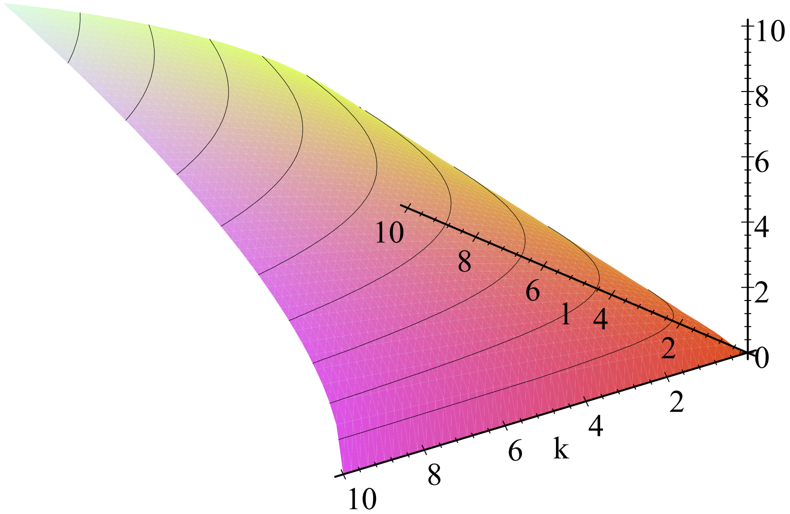
Formalmente, questo significa che da quel punto in avanti la variazione della produttività marginale è negativa al crescere del fattore lavoro:

$$\frac{d\left(\frac{dY}{dL}\right)}{dL}=\frac{d\left(Y_L'\right)}{dL}=\frac{d^2Y}{dL^2}=Y_L''<0$$

Introdotta originariamente da David Ricardo per spiegare il declino della produzione di grano in Inghilterra (a causa delle fertilità decrescente della terra), è stata generalizzata a tutti i fattori da autori successivi.

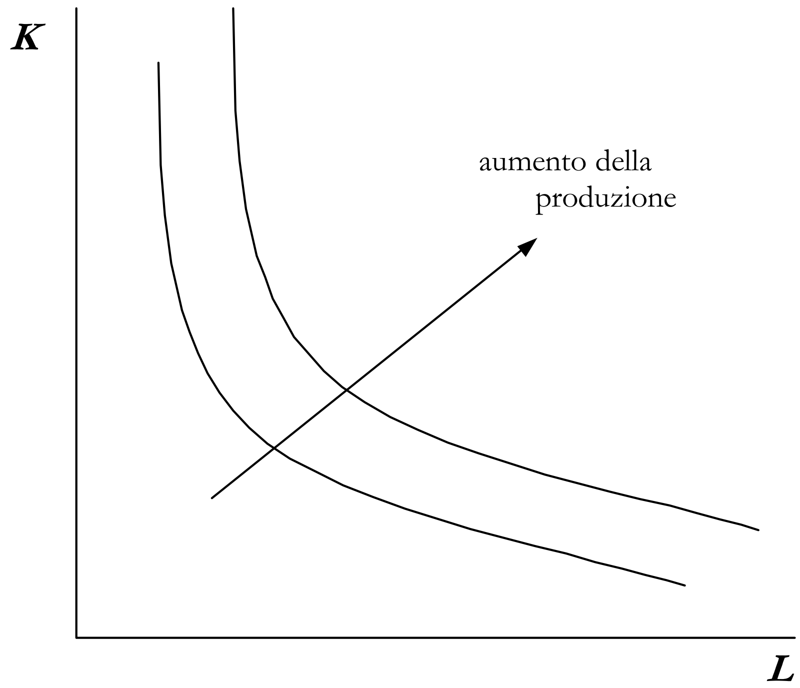
Ogni fattore produttivo, <u>tenuto costante l'impiego di tutti gli altri</u>, può soddisfare la legge del rendimento marginale decrescente.

Passando al lungo periodo e rendendo il fattore K variabile, la funzione di produzione $Y = f(L,K)$ possiede una rappresentazione tridimensionale del tipo



Come nel caso delle curve di indifferenza, anche in questo caso possiamo individuare delle curve di livello (chiamate ***isoquanti***) che descrivono le combinazioni di inputs che assicurano lo stesso livello di output.

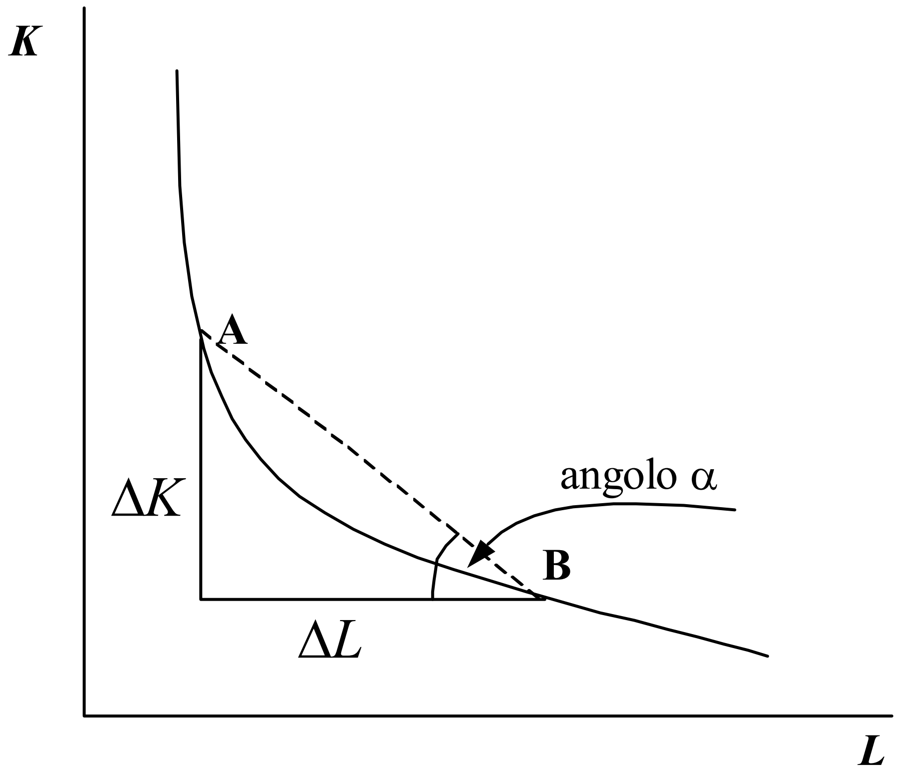
Le proiezioni nello spazio (L, K) delle curve di livello ci informa delle caratteristiche del processo produttivo.



La pendenza di un isoquanto è definita dal ***saggio marginale di sostituzione tecnica***, che indica di quanto occorre aumentare (diminuire) l'impiego di un fattore se si vuole diminuire (aumentare) l'impiego dell'altro fattore.

Geometricamente esso corrisponde alla pendenza (media tra i punti **A** e **B**) dell'isoquanto. Infatti

$$\text{MTRS} = \frac{\Delta K}{\Delta L} = tg(\alpha)$$



Data una funzione di produzione, si può dimostrare che il MTRS corrisponde al rapporto tra le produttività marginali dei fattori. Infatti la variazione della produzione è data da

$$\Delta Y = MP_L \cdot \Delta L + MP_K \cdot \Delta K$$

Poiché lungo un isoquanto deve sempre valere che $\Delta Y = 0$, allora questo è equivalente a

$$\frac{\Delta K}{\Delta L} = -\frac{MP_L}{MP_K}$$

Se consideriamo variazioni infinitesime allora

$$dY = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{MTRS} = -\frac{\frac{\partial Y}{\partial L}}{\frac{\partial Y}{\partial K}} = -\frac{Y'_L}{Y'_K}$$

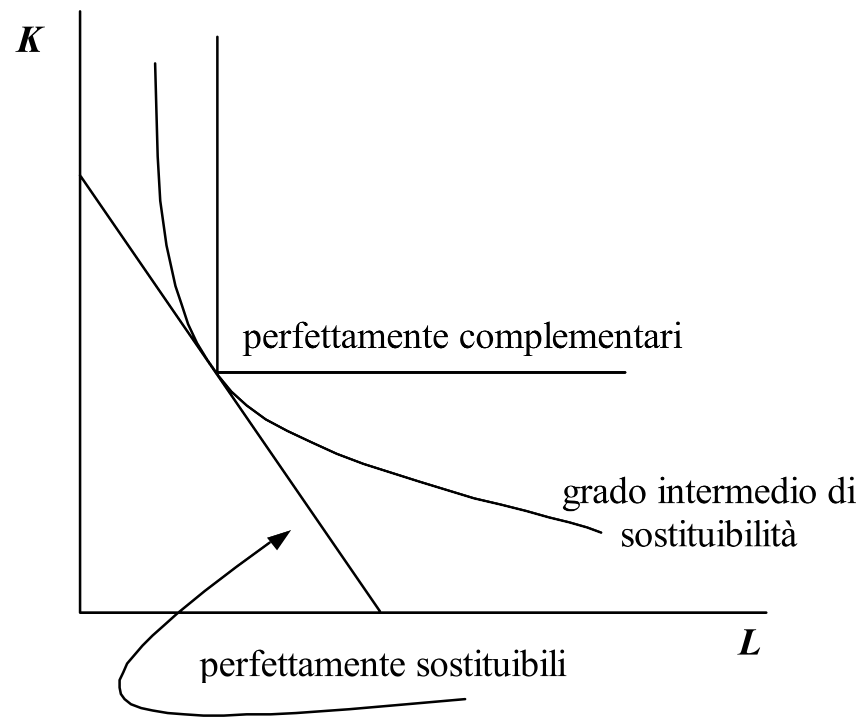
Notiamo che se entrambi i fattori soddisfano il requisito di produttività marginale decrescente, allora muovendoci da sinistra a destra lungo un isoquanto si registra una diminuzione di Y'_L e un aumento di Y'_K: come conseguenza il MTRS diminuisce costantemente.

Quindi isoquanti convessi verso l'origine indicano che entrambi i fattori esibiscono produttività marginale decrescente.

Dalla forma degli isoquanti possiamo anche inferire il ***grado di sostituibilità*** tra i fattori.

- Se il MTRS non cambia lungo l'isoquanto abbiamo la massima sostituibilità (fattori *perfettamente sostituibili*): dal punto di vista del processo produttivo è equivalente l'uso dell'uno o dell'altro (dipenderà dal costo relativo).

- Se il MTRS varia tra valori estremi (tra 0 e ∞) allora abbiamo la minima sostituibilità (fattori *perfettamente complementari*): il processo produttivo richiede un rapporto fisso tra i due fattori (esempio: un computer per ogni impiegato).



Se ci domandiamo come vari la produzione al variare dell'insieme di tutti i fattori produttivi, possiamo fare uso del concetto di ***rendimenti di scala***.

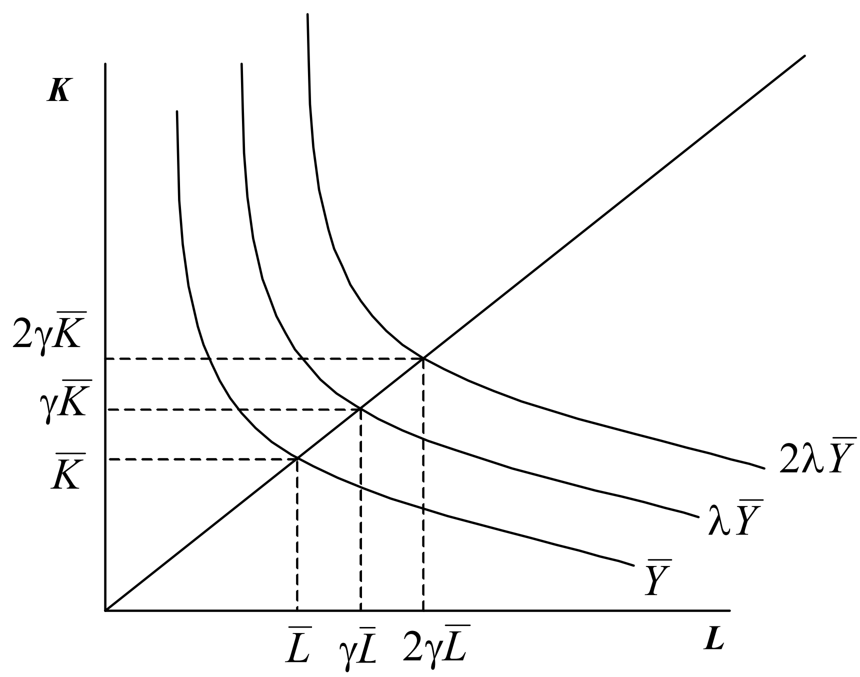
⌧ Se aumentando tutti l'impiego di tutti i fattori produttivi di un fattore di proporzionalità λ, la produzione aumenta più di λ, si dice che quel processo produttivo presenta RENDIMENTI DI SCALA CRESCENTI (esempio: un oleodotto di raggio *r* richiede come input una quantità di metallo proporzionale alla circonferenza $2\pi r$, ma ha un output di portata proporzionale all'area πr^2).

⌧ Se aumentando l'impiego di tutti i fattori di λ, la produzione cresce anch'essa di λ, allora diciamo di essere in presenza di RENDIMENTI DI SCALA COSTANTI.

⌧ Infine, se aumentando l'impiego di tutti i fattori di λ la produzione cresce meno di λ, siamo in presenza di RENDIMENTI DI SCALA DECRESCENTI.

Per avere una rappresentazione geometrica dei rendimenti di scala, occorre tracciare gli isoquanti corrispondenti a livelli di produzione che siano tra di loro multipli (per esempio $Y = \overline{Y}, \lambda\overline{Y}, 2\lambda\overline{Y}, \ldots$).
Si prende poi un raggio qualsiasi dall'origine e si va ad osservare se le intersezioni tra isoquanti e raggio corrispondono a quantità dei fattori che siano multipli degli impieghi iniziali.

Nella figura abbiamo considerato isoquanti omotetici (incrociano i raggi dall'origine sempre con la stessa pendenza). Quando i fattori aumentano del fattore γ, la produzione aumenta del fattore λ.



Se $\gamma < \lambda \Rightarrow$ rendimenti di scala crescenti.
Se $\gamma = \lambda \Rightarrow$ rendimenti di scala costanti.
Se $\gamma > \lambda \Rightarrow$ rendimenti di scala decrescenti.

Definiamo inoltre come ***elasticità di scala*** il rapporto tra variazione percentuale dell'output e variazione percentuale degli input. Nell'esempio

$$\eta_{scala} = \frac{\lambda}{\gamma}$$

Più formalmente, i rendimenti di scala sono associati al *grado di omogeneità di una funzione*.
Si definisce grado di omogeneità il fattore η, quando variando tutti gli inputs del fattore γ, l'output varia del fattore $\lambda = \gamma^{\eta}$. Data una generica funzione di produzione $Y = f(L, K)$ si ha che

$$f(\gamma L, \gamma K) = \lambda Y = \lambda f(L, K) = \gamma^{\eta} f(L, K)$$

Se $\eta > 1 \Rightarrow$ rendimenti di scala crescenti.
Se $\eta = 1 \Rightarrow$ rendimenti di scala costanti.
Se $\eta < 1 \Rightarrow$ rendimenti di scala decrescenti.

Esempio: tecnologia Cobb-Douglas

$$Y = L^{\alpha} K^{\beta}$$

Produttività marginale del lavoro

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \alpha L^{\alpha-1} K^{\beta}$$

Produttività media del lavoro

$$\frac{Y}{L} = \frac{L^{\alpha} K^{\beta}}{L} = L^{\alpha-1} K^{\beta}$$

Elasticità della produzione rispetto al lavoro

$$\eta_{YL} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial L}}{\frac{Y}{L}} = \frac{\alpha L^{\alpha-1} K^{\beta}}{L^{\alpha-1} K^{\beta}} = \alpha$$

Produttività marginale del capitale

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \beta L^{\alpha} K^{\beta - 1}$$

La produttività marginale del lavoro diminuisce se $\alpha < 1$ e quella del capitale diminuisce se $\beta < 1$. Infatti entrambe le frazioni diminuiscono all'aumentare del denominatore

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \alpha \frac{K^{\beta}}{L^{1-\alpha}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial Y}{\partial K} = \beta \frac{L^{\alpha}}{K^{1-\beta}}$$

Saggio marginale di sostituzione tecnica

$$\text{MTRS} = \frac{Y'_L}{Y'_K} = \frac{\alpha L^{\alpha-1} K^{\beta}}{\beta L^{\alpha} K^{\beta-1}} = \frac{\alpha L^{-1} K^{1}}{\beta} = \frac{\alpha K}{\beta L}$$

che diminuisce al crescere di L e al diminuire di $K \Rightarrow$ gli isoquanti sono convessi.

Infatti, dato $Y = \overline{Y}$, l'isoquanto assicura

$\overline{Y} = L^{\alpha} K^{\beta}$, ovvero $K = \left(\frac{\overline{Y}}{L^{\alpha}} \right)^{\frac{1}{\beta}}$

Rendimenti di scala

$$(\gamma L)^{\alpha} (\gamma K)^{\beta} = \gamma^{\alpha+\beta} L^{\alpha} K^{\beta} = \gamma^{\alpha+\beta} Y$$

Se $\alpha + \beta > 1 \Rightarrow$ rendimenti di scala crescenti.
Se $\alpha + \beta = 1 \Rightarrow$ rendimenti di scala costanti.
Se $\alpha + \beta < 1 \Rightarrow$ rendimenti di scala decrescenti.