PERCORSO SUI PRINCIPALI CONCETTI ECONOMICI
② I CONSUMATORI E L'OFFERTA DEI FATTORI PRODUTTIVI

La DECISIONE DI RISPARMIO ovvero L'OFFERTA DI CAPITALI ALLE IMPRESE

La decisione di risparmiare coinvolge necessariamente un effetto intertemporale. Io risparmio oggi per
- cautelarmi di fronte ad un futuro incerto (*perché non acquistare una assicurazione ?*)
- potermi permettere un reddito più decente quando andrò in pensione (*perché non farsi una pensione privata ?*)

In ogni caso rinuncio a consumare oggi per un beneficio domani. Possiamo pensare che il beneficio arrecato possa tradursi in maggior consumo in futuro.

Immaginiamo per semplicità che esistano due soli periodi (*presente* e *futuro*). In ogni periodo esiste un paniere composito di consumo, per cui c_1 indica il consumo del presente e c_2 indica il consumo nel futuro.

In ciascun periodo il consumatore ottiene un reddito (m_1 nel presente e m_2 nel futuro).

Se non esiste possibilità di trasferire reddito da un periodo a quello successivo, non si pone il problema del risparmio ⇨ il consumatore è costretto a consumare in ciascun periodo il reddito corrispondente.

I vincoli di bilancio diventano banalmente

$$c_1 = m_1 \text{ e } c_2 = m_2$$

È il caso di assenza di un equivalente universale di valore che non deperisca col trascorrere del tempo.

Supponiamo invece che esista una merce chiamata *moneta* che ha la proprietà di conservare il proprio valore col trascorrere del tempo.

Se indichiamo con s l'ammontare di risparmio nel presente, possiamo introdurlo in entrambi i vincoli di bilancio:

oggi consumo meno

$$c_1 + s = m_1$$

per consumare di più domani

$$c_2 = m_2 + s$$

Non devo per forza risparmiare, posso anche farmi prestare dei soldi: se indico con d il debito che contraggo con qualcuno

oggi consumo di più

$$c_1 = m_1 + d$$

per consumare di meno domani

$$c_2 = m_2 - d$$

Tutti sappiamo che risparmiando otteniamo una remunerazione del nostro capitale (pari a r, il tasso di interesse creditorio), mentre indebitandoci paghiamo un costo (pari a R, il tasso di interesse debitorio).

Se tutti restituissero i debiti e le banche fossero enti non-profit, allora dovrebbe essere $r = R$. In realtà si ha sempre $R > r$, ma noi ci atterremo alla prima ipotesi.

Osserviamo inoltre che un debito è un risparmio negativo, ovvero $d = -s$.

Allora i due vincoli di bilancio nei due periodi diventano

presente

$$c_1 = m_1 - s = m_1 + d$$

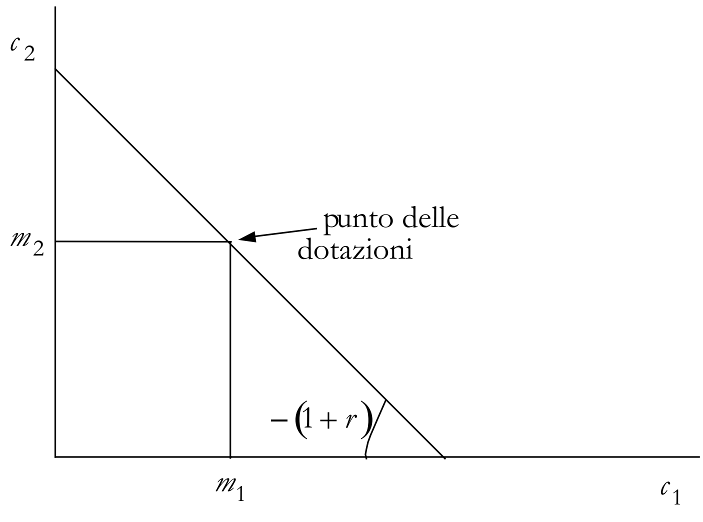
futuro

$$c_2 = m_2 + s \cdot (1 + r) = m_2 - d \cdot (1 + R)$$

Possiamo compattare i due vincoli di bilancio, esplicitando il vincolo del presente e sostituendo nel vincolo del futuro

$$s = m_1 - c_1$$
$$\Downarrow$$
$$c_2 = m_2 + s \cdot (1 + r) = m_2 + (m_1 - c_1) \cdot (1 + r)$$
$$\Downarrow$$
$$c_1 \cdot (1 + r) + c_2 = m_2 + m_1 \cdot (1 + r)$$

L'ultima espressione prende il nome di *vincolo di bilancio intertemporale*, perché mette in relazione il consumo di entrambi i periodi con il reddito di entrambi i periodi. La sua rappresentazione grafica è la seguente



Vediamo la sua interpretazione. Nella sua versione (detta *capitalizzata*)

$$c_1 \cdot (1 + r) + c_2 = m_2 + m_1 \cdot (1 + r)$$

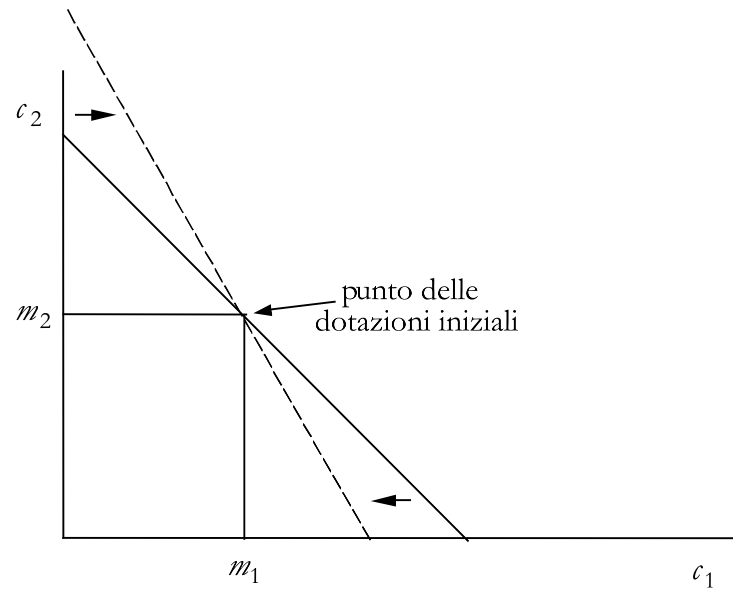
essa ci dice che 1 euro nel presente vale $(1 + r)$ euro nel futuro. Quindi spendere 1 euro oggi ha un costo opportunità di $(1 + r)$, dove r è il mancato guadagno (in termini di interesse) cui rinunciamo.

Possiamo quindi definire $(1+r)$ il prezzo relativo del consumo presente rispetto al consumo futuro.

Un modo alternativo di visualizzare lo stesso vincolo è rapportarlo al presente (versione *attualizzata* o *present value*), dividendo tutta l'espressione per $(1+r)$.

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = m_1 + \frac{m_2}{1+r}$$

Possiamo dire che 1 euro guadagnato domani equivale ad $\frac{1}{1+r} < 1$ euro guadagnato oggi.
Quando varia il tasso di interesse varia il prezzo relativo del presente rispetto al futuro.
Per esempio un aumento del tasso di interesse fa ruotare il vincolo di bilancio intertemporale facendo perno sulla dotazione iniziale (detto anche punto di autarchia, perché il consumatore può sempre scegliere di spendere interamente il suo reddito in ciascun periodo).



Se il consumatore esprime le sue preferenze tra consumo presente e consumo futuro attraverso una funzione di utilità del tipo $U(c_1, c_2)$, allora possiamo tracciare delle curve di indifferenza intertemporali, nonché definire un *tasso di sostituzione intertemporale*. Esso descrive quanto il consumatore valuta il consumo futuro in termini di consumo presente.

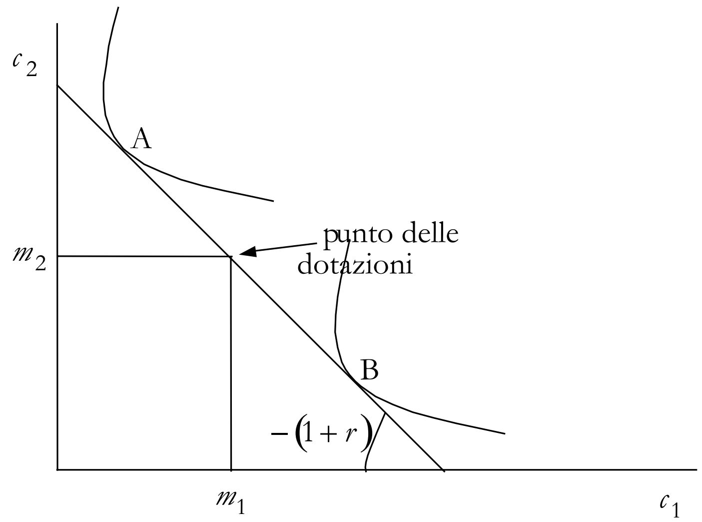
Se $\frac{\Delta c_2}{\Delta c_1} = \frac{U_1'}{U_2'} > 1$ si dice che il consumatore ha *preferenze intertemporali positive* (chiede più di una unità di consumo futura per compensare la rinuncia ad una unità di consumo presente).

Se $\frac{\Delta c_2}{\Delta c_1} = \frac{U_1'}{U_2'} = 1$ si dice che il consumatore ha *preferenze intertemporali neutrali*: presente e futuro si equivalgono dal suo punto di vista.

Se $\frac{\Delta c_2}{\Delta c_1} = \frac{U_1'}{U_2'} < 1$ si dice che il consumatore ha *preferenze intertemporali negative*: il consumo presente soddisfa un bisogno di consumo immediato.

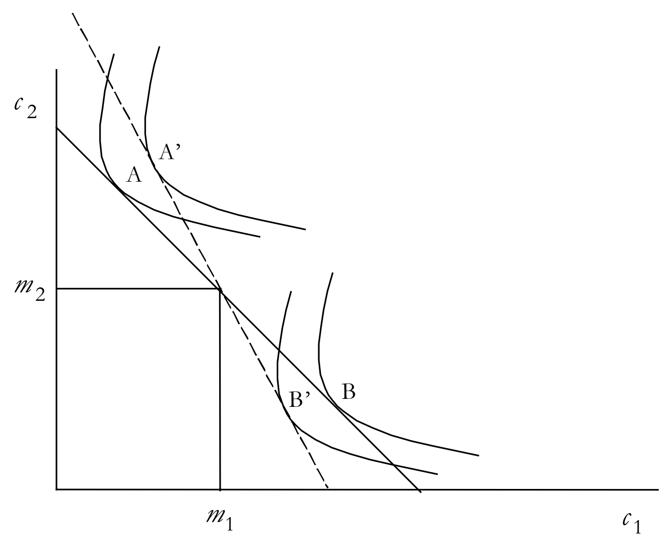
In equilibrio il consumatore eguaglia il saggio marginale di sostituzione intertemporale ai prezzi relativi, ovvero

$$\frac{\Delta c_2}{\Delta c_1} = 1 + r$$



Il signor A ed il signor B sono entrambi in equilibrio. Ma il signor A nel primo periodo risparmia, mentre il signor B si indebita.

Cosa succede quando aumenta il tasso di interesse ?



Il signor B ridurrà sicuramente il suo debito: l'aumento del prezzo del consumo presente (*effetto di sostituzione*) e il maggior onere di restituzione del debito (*effetto di reddito*) fanno sì che riduca il consumo odierno a favore del consumo futuro.

Poiché entrambi gli effetti vanno nella stessa direzione, per i debitori possiamo affermare che un aumento del tasso di interesse fa aumentare il risparmio (ovvero ridurre il debito).

Il signor A invece sperimenta lo stesso effetto di sostituzione, ma essendo creditore ottiene dallo stesso risparmio un flusso di interessi maggiori ⇨ l'*effetto di reddito* induce un aumento del consumo corrente, nonostante l'*effetto di sostituzione* lavori nella direzione opposta.

A priori non possiamo dire se un aumento del tasso di interesse faccia aumentare/diminuire il consumo presente, ovvero diminuire/aumentare il risparmio.

I consumatori e l'offerta dei fattori produttivi:
LA DECISIONE DI GODERE DEL PROPRIO TEMPO LIBERO ovvero L'OFFERTA DI LAVORO ALLE IMPRESE

Ciascuna persona che non sia un capitalista possiede come unica risorsa per procurarsi reddito la vendita della propria forza lavoro per un intervallo di tempo definito (lavoro salariato).

Nel vendere una parte del proprio tempo, un individuo rinuncia al godersi il tempo libero (per cui il tempo di lavoro è un "male", mentre un disoccupato è una persona "ricca di tempo libro").

Il salario diventa il prezzo di vendita del proprio tempo libero, e nel contempo anche la fonte del reddito spendibile da parte del consumatore.

Indichiamo con T il tempo libero, con $T_{\max}$ la durata massima del tempo libero a disposizione, con w il salario nominale, con c il consumo di un paniere composito di beni, con p il prezzo di acquisto di questo paniere e con X un reddito non da lavoro.

Allora il vincolo di bilancio di questo consumatore sarà dato da

$$pc = w(T_{\max} - T) + X$$

dove $(T_{\max} - T)$ è il tempo libero non goduto, ovvero offerto sul mercato. Lo stesso vincolo può anche essere scritto come

$$pc + wT = wT_{\max} + X$$

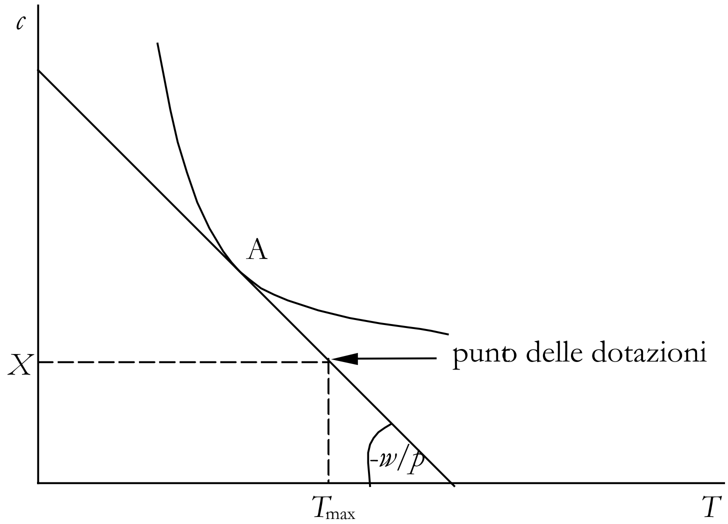
Anche in questo caso esiste un "punto delle dotazioni": il consumatore può decidere di non lavorare, limitandosi a consumare il reddito non da lavoro

$$pc = X$$
$$T = T_{\max}$$

Se invece il salario offerto supera il salario di riserva, l'individuo entra sul mercato del lavoro. In questo caso il suo vincolo di bilancio può essere rappresentato come

$$c = \left[\frac{w}{p}T_{\max} + \frac{X}{p}\right] - \frac{w}{p}T$$

Il vincolo di bilancio ha pendenza pari a $-\frac{w}{p}$, che corrisponde al potere d'acquisto del salario nominale (detto anche *salario reale*).



Se l'individuo possiede delle preferenze in termini di consumo e di godimento del tempo libero $U(c,T)$, egli avrà un saggio marginale di sostituzione tra questi due beni, pari a $\frac{\Delta c}{\Delta T}=\frac{U'_T}{U'_c}$.

Nel punto di scelta ottima (punto A), l'individuo uguaglia il saggio marginale col prezzo relativo (in realtà è un *costo opportunità*) del tempo libero

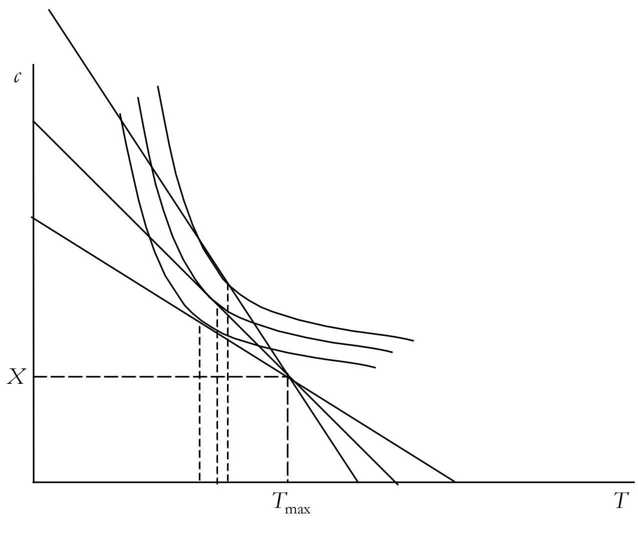
$$\frac{\Delta c}{\Delta T}=\frac{U'_T}{U'_c}=\frac{w}{p}$$

Cosa succede quando aumenta il salario reale ?

Per via dell'*effetto di sostituzione*, il tempo libero è più costoso, e l'individuo ne ridurrebbe il godimento, aumentando l'offerta di lavoro.

Tuttavia, sentendosi più ricco, per via dell'*effetto di reddito* egli vorrà godersi più tempo libero, e quindi ridurre l'offerta di lavoro.

L'effetto finale è ambiguo.

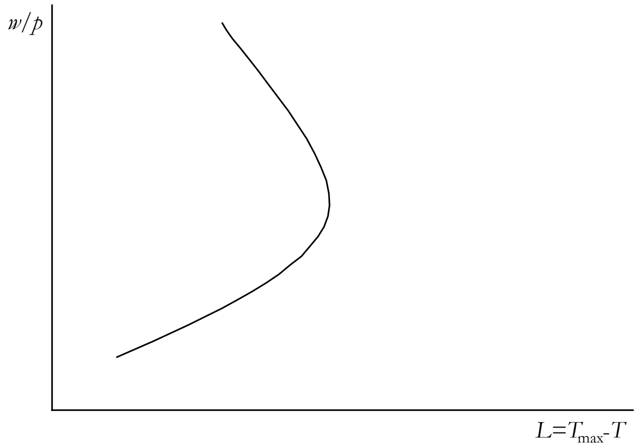


Il grafico presenta il caso di un aumento del salario reale (= prezzo relativo del tempo libero) che produce un aumento della sua domanda, ovvero una riduzione dell'offerta di lavoro.

Riportando su uno stesso grafico offerta di lavoro e salario reale possiamo ottenere una relazione del tipo seguente:

✧ per salari bassi e limitati ammontari di ore lavorate, l'effetto di sostituzione domina quello di reddito (l'offerta di lavoro aumenta col salario)

✧ per salari alti e/o elevati ammontari di ore lavorate, l'effetto di reddito domina quello di sostituzione (l'offerta di lavoro diminuisce all'aumentare del salario)



La produzione

Cos'è un processo produttivo ?
È un processo che trasforma i fattori produttivi (materie prime, macchine, ore di lavoro umano, progettazione – genericamente indicati come ***inputs***) in risultati (prodotti vendibili sul mercato, beni intermedi, inquinamento – genericamente indicati come ***outputs***).

Gli inputs e gli outputs sono definiti come ***flussi***, cioè come erogazione di quantità fisiche per unità di tempo.

Anche le macchine o gli edifici (che rappresentano degli ***stocks***, in quanto misurano delle consistenze in un momento specifico) possono essere pensati come erogatori di "flussi di servizi" (esempio: il deperimento macchina).

Indichiamo con $\mathbf{X}$ l'insieme degli inputs e con $x \in \mathbf{X}, x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un suo generico elemento costituito dal vettore ordinato di tutti gli n inputs.

Indichiamo con $\mathbf{Y}$ l'insieme degli outputs e con $y \in \mathbf{Y}, y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ un suo generico elemento costituito dal vettore di tutti gli m outputs.

Allora il processo produttivo, cioè la relazione tra inputs e outputs, può essere descritto da una corrispondenza tra gli elementi di $\mathbf{X}$ e quelli di $\mathbf{Y}$:

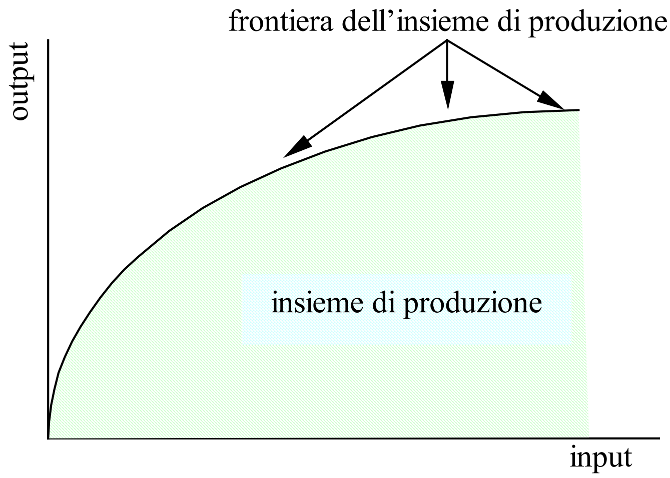
$$\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$$

Essa ci dice che il vettore $y \in \mathbf{Y}$ può essere prodotto a partire dal vettore $x \in \mathbf{X}$.

Possiamo fissare alcune proprietà di questa corrispondenza:

① **efficienza** (se non si può produrre più outputs con lo stesso ammontare di inputs, ovvero non si può produrre gli stessi outputs con minori quantità di inputs).

Come nel caso del vincolo di bilancio, questa proprietà ci porta sulla frontiera dell'insieme di produzione. Nel caso di un solo input e di un solo output si può visualizzarla così:



La **FUNZIONE DI PRODUZIONE** misura quindi il massimo livello di output che può essere ottenuto da un dato ammontare di inputs.

Come la funzione di utilità rappresenta un ordinamento di preferenze, così la funzione di produzione rappresenta uno stato della tecnologia.

Se la tecnologia ammette variazioni infinitesime degli inputs, allora la funzione di produzione deve godere della proprietà di

② **continuità** (si può variare infinitesimamente l'output variando infinitesimanente l'input)

Se la tecnologia ammette l'**eliminazione senza costo** (*free disposal*) degli input eccedenti, allora la funzione di produzione deve godere di

③ **monotonicità** (aumentando almeno un input l'output deve restare costante o aumentare)

Infine, se la tecnologia gode della proprietà di convessità (combinando due tecniche produttive che danno lo stesso livello di produzione deve essere possibile produrre almeno lo stesso livello di output), allora la funzione di produzione deve godere della proprietà di

④ **concavità** (aumentando anche un solo input l'output deve crescere, ma ad un ritmo progressivamente decrescente).

* * *

Noi tralasceremo il caso di più output (*produzioni congiunte*) e ci concentreremo su funzioni di produzione con un solo output Y e due inputs, *lavoro* L e *servizi da capitale* K. Assumeremo che tali funzioni godano di continuità, monotonicità e talvolta di concavità, e le indicheremo con

$$Y = f(L,K)$$

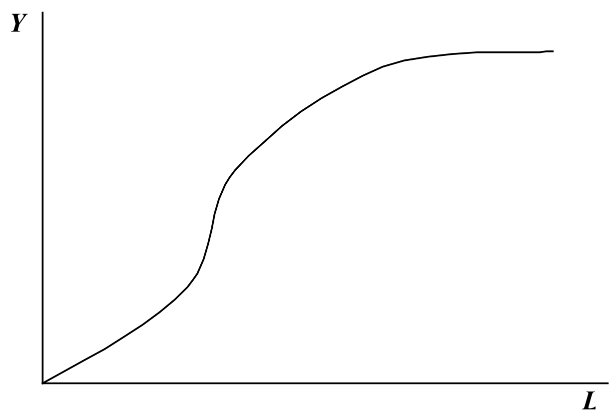
dove $(L,K) \in \mathbf{X}$, l'insieme degli inputs.

Distinguiamo tra BREVE PERIODO e LUNGO PERIODO a seconda che non sia o sia possibile modificare l'insieme di tutti gli inputs.

Nel breve periodo supponiamo che lo stock di capitale sia dato $K = \overline{K}$. Allora la quantità di produzione dipende dall'unico fattore variabile, il lavoro:

$$Y = f(L,\overline{K}) = F(L)$$

Essa può essere rappresentata geometricamente come



Dalla forma geometrica della funzione di produzione traiamo informazioni sulle caratteristiche tecniche del processo:

❶ la funzione di produzione parte dall'origine

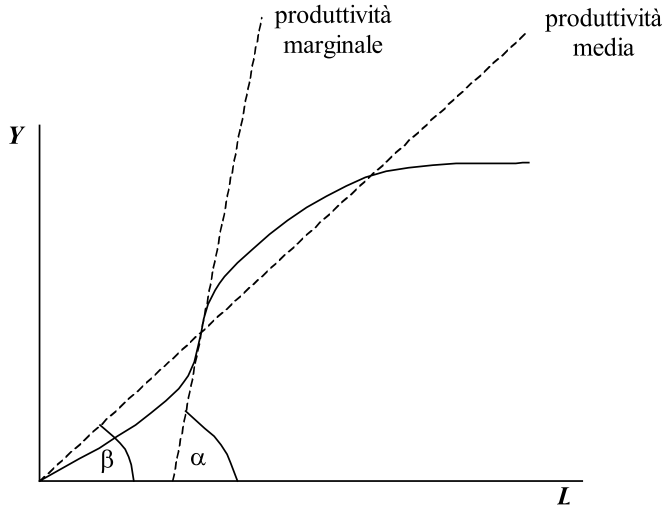
$$F(0) = 0$$

❷ se la funzione di produzione è strettamente concava, essa soddisfa la legge dei ***rendimenti marginali decrescenti***.

Consideriamo il rendimento (chiamato anche ***produttività***) dell'unico fattore variabile, il lavoro. Esso può essere misurato in due modi:

- $\textit{produttività media} = \dfrac{Y}{L}$
- $\textit{produttività marginale} = \dfrac{\Delta Y}{\Delta L} \xrightarrow[\Delta L \to 0]{} \dfrac{dY}{dL}$

Il primo corrisponde alla pendenza di un raggio che esce dall'origine, il secondo alla pendenza della funzione di produzione in un punto.



In analogia con l'elasticità della domanda di consumo al reddito, possiamo definire l'***elasticità della funzione di produzione*** (nei confronti del fattore lavoro) η_{YL} come rapporto tra produttività marginale $\dfrac{\Delta Y}{\Delta L}$ e produttività media $\dfrac{Y}{L}$. Geometricamente può essere letta come $\eta_{YL} = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

Notiamo che quando la produttività marginale **è maggiore** della produttività media (ovvero $\eta_{YL} > 1$), allora la produttività media aumenta: il contributo produttivo di ogni lavoratore aggiuntivo (*produttività marginale*) supera quello dei lavoratori preesistenti (*produttività media*).

Viceversa, quando la produttività marginale **è minore** della produttività media (ovvero $\eta_{YL} < 1$), la produttività media diminuisce.

Da questo ne deduciamo che la produttività media è massima quando la produttività media **è uguale** alla produttività marginale (ovvero $\eta_{YL} = 1$).

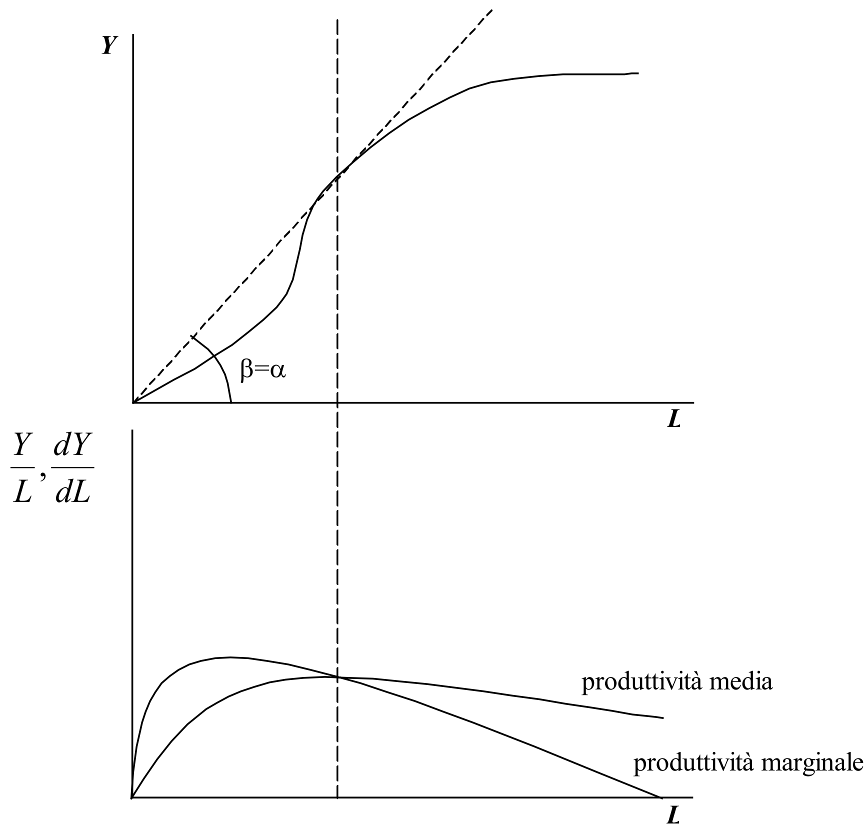
Più formalmente, si risolve il seguente problema

$$\max_L \frac{Y(L)}{L}$$

Ponendo uguale a zero la derivata prima

$$\frac{\dfrac{dY(L)}{dL} \cdot L - Y(L)}{L^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dY(L)}{dL} = \frac{Y(L)}{L}$$

che equivale al caso di $\eta_{YL} = \dfrac{\dfrac{dY(L)}{dL}}{\dfrac{Y(L)}{L}} = 1$.



Se la funzione di produzione da un certo punto in poi diviene concava, questo significa che da quel punto in avanti soddisfa la ***legge dei rendimenti marginali decrescenti***, ovvero che aumentare la quantità di un solo fattore tenendo fissi gli altri non conviene (esempio: aumentare il numero degli impiegati tenendo fissi il numero di computer e la stanza dove lavorano).

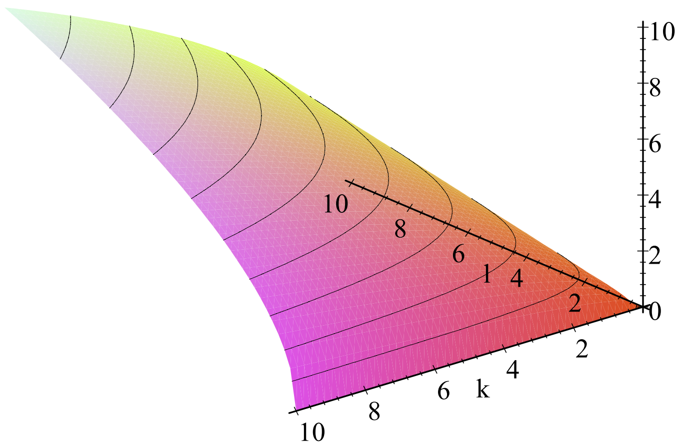
Formalmente, questo significa che da quel punto in avanti la variazione della produttività marginale è negativa al crescere del fattore lavoro:

$$\frac{d\left(\dfrac{dY}{dL}\right)}{dL} = \frac{d(Y'_L)}{dL} = \frac{d^2Y}{dL^2} = Y''_L < 0$$

Introdotta originariamente da David Ricardo per spiegare il declino della produzione di grano in Inghilterra (a causa delle fertilità decrescente della terra), è stata generalizzata a tutti i fattori da autori successivi.

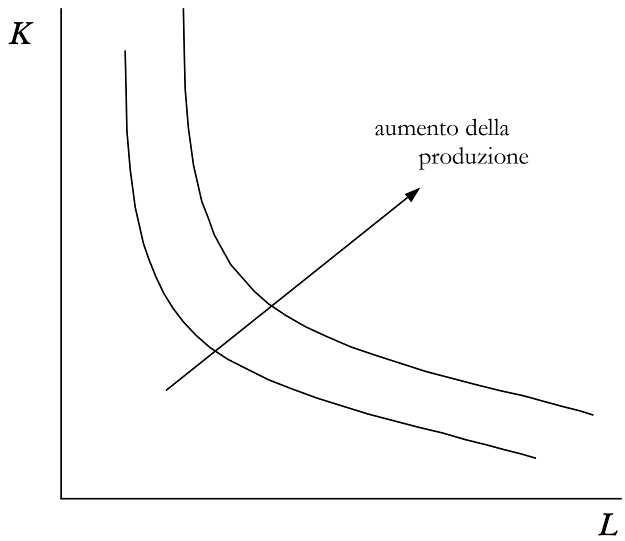
Ogni fattore produttivo, <u>tenuto costante l'impiego di tutti gli altri</u>, può soddisfare la legge del rendimento marginale decrescente.

Passando al lungo periodo e rendendo il fattore K variabile, la funzione di produzione $Y = f(L,K)$ possiede una rappresentazione tridimensionale del tipo



Come nel caso delle curve di indifferenza, anche in questo caso possiamo individuare delle curve di livello (chiamate ***isoquanti***) che descrivono le combinazioni di inputs che assicurano lo stesso livello di output.

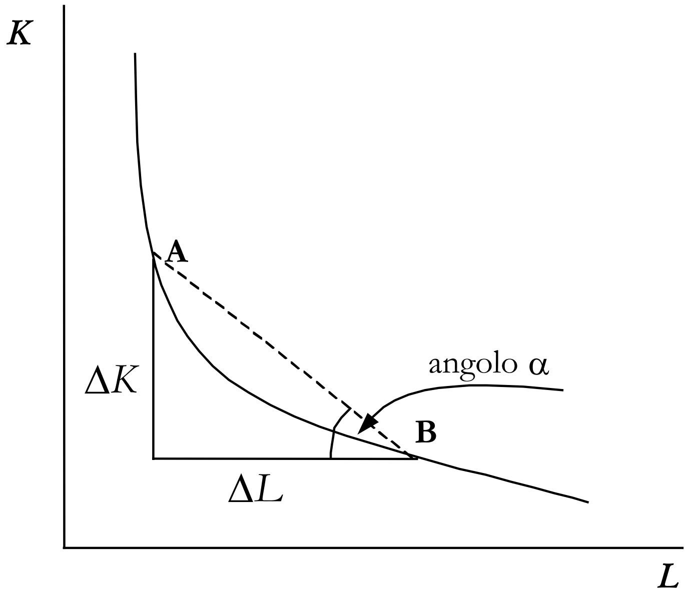
Le proiezioni nello spazio (L,K) delle curve di livello ci informa delle caratteristiche del processo produttivo.



La pendenza di un isoquanto è definita dal ***saggio marginale di sostituzione tecnica***, che indica di quanto occorre aumentare (diminuire) l'impiego di un fattore se si vuole diminuire (aumentare) l'impiego dell'altro fattore.

Geometricamente esso corrisponde alla pendenza (media tra i punti **A** e **B**) dell'isoquanto. Infatti

$$\text{MTRS} = \frac{\Delta K}{\Delta L} = tg(\alpha)$$



Data una funzione di produzione, si può dimostrare che il MTRS corrisponde al rapporto tra le produttività marginali dei fattori. Infatti la variazione della produzione è data da

$$\Delta Y = MP_L \cdot \Delta L + MP_K \cdot \Delta K$$

Poiché lungo un isoquanto deve sempre valere che $\Delta Y = 0$, allora questo è equivalente a

$$\frac{\Delta K}{\Delta L} = -\frac{MP_L}{MP_K}$$

Se consideriamo variazioni infinitesime allora

$$dY = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{MTRS} = -\frac{\frac{\partial Y}{\partial L}}{\frac{\partial Y}{\partial K}} = -\frac{Y'_L}{Y'_K}$$

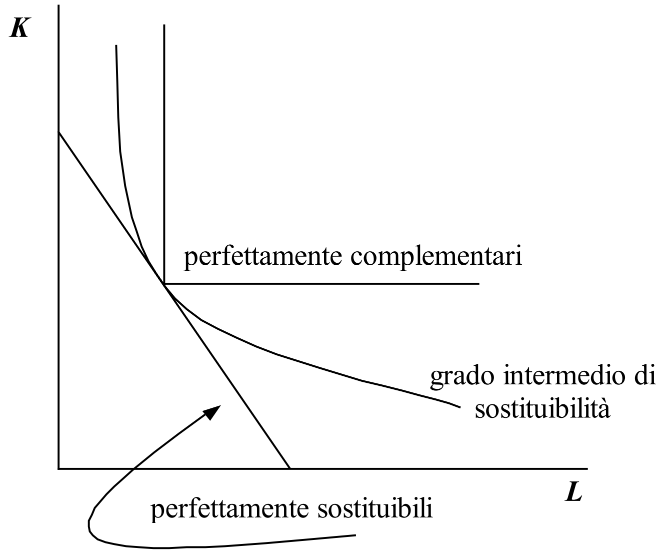
Notiamo che se entrambi i fattori soddisfano il requisito di produttività marginale decrescente, allora muovendoci da sinistra a destra lungo un isoquanto si registra una diminuzione di Y'_L e un aumento di Y'_K: come conseguenza il MTRS diminuisce costantemente.

Quindi isoquanti convessi verso l'origine indicano che entrambi i fattori esibiscono produttività marginale decrescente.

Dalla forma degli isoquanti possiamo anche inferire il ***grado di sostituibilità*** tra i fattori.

➢ Se il MTRS non cambia lungo l'isoquanto abbiamo la massima sostituibilità (fattori *perfettamente sostituibili*): dal punto di vista del processo produttivo è equivalente l'uso dell'uno o dell'altro (dipenderà dal costo relativo).

➢ Se il MTRS varia tra valori estremi (tra 0 e ∞) allora abbiamo la minima sostituibilità (fattori *perfettamente complementari*): il processo produttivo richiede un rapporto fisso tra i due fattori (esempio: un computer per ogni impiegato).



Se ci domandiamo come vari la produzione al variare dell'insieme di tutti i fattori produttivi, possiamo fare uso del concetto di ***rendimenti di scala***.

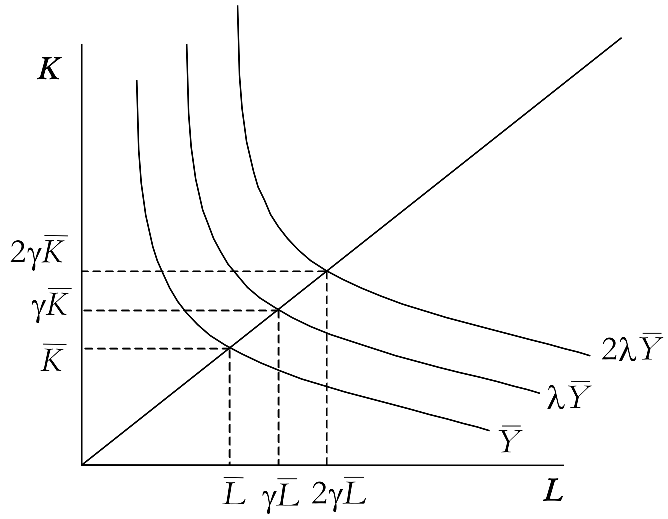
⌧ Se aumentando tutti l'impiego di tutti i fattori produttivi di un fattore di proporzionalità λ, la produzione aumenta più di λ, si dice che quel processo produttivo presenta RENDIMENTI DI SCALA CRESCENTI (esempio: un oleodotto di raggio r richiede come input una quantità di metallo proporzionale alla circonferenza $2\pi r$, ma ha un output di portata proporzionale all'area πr^2).

⌧ Se aumentando l'impiego di tutti i fattori di λ, la produzione cresce anch'essa di λ, allora diciamo di essere in presenza di RENDIMENTI DI SCALA COSTANTI.

⌧ Infine, se aumentando l'impiego di tutti i fattori di λ la produzione cresce meno di λ, siamo in presenza di RENDIMENTI DI SCALA DECRESCENTI.

Per avere una rappresentazione geometrica dei rendimenti di scala, occorre tracciare gli isoquanti corrispondenti a livelli di produzione che siano tra di loro multipli (per esempio $Y = \overline{Y}, \lambda\overline{Y}, 2\lambda\overline{Y}, \ldots$).
Si prende poi un raggio qualsiasi dall'origine e si va ad osservare se le intersezioni tra isoquanti e raggio corrispondono a quantità dei fattori che siano multipli degli impieghi iniziali.

Nella figura abbiamo considerato isoquanti omotetici (incrociano i raggi dall'origine sempre con la stessa pendenza). Quando i fattori aumentano del fattore γ, la produzione aumenta del fattore λ.



Se $\gamma < \lambda$ ⇨ rendimenti di scala crescenti.
Se $\gamma = \lambda$ ⇨ rendimenti di scala costanti.
Se $\gamma > \lambda$ ⇨ rendimenti di scala decrescenti.

Definiamo inoltre come ***elasticità di scala*** il rapporto tra variazione percentuale dell'output e variazione percentuale degli input. Nell'esempio

$$\eta_{scala} = \frac{\lambda}{\gamma}$$

Più formalmente, i rendimenti di scala sono associati al *grado di omogeneità di una funzione*.
Si definisce grado di omogeneità il fattore η, quando variando tutti gli inputs del fattore γ, l'output varia del fattore $\lambda = \gamma^{\eta}$. Data una generica funzione di produzione $Y = f(L,K)$ si ha che

$$f(\gamma L, \gamma K) = \lambda Y = \lambda f(L,K) = \gamma^{\eta} f(L,K)$$

Se $\eta > 1$ ⇨ rendimenti di scala crescenti.
Se $\eta = 1$ ⇨ rendimenti di scala costanti.
Se $\eta < 1$ ⇨ rendimenti di scala decrescenti.

Esempio: tecnologia Cobb-Douglas $Y = L^{\alpha}K^{\beta}$

Produttività marginale del lavoro

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \alpha L^{\alpha-1}K^{\beta}$$

Produttività media del lavoro

$$\frac{Y}{L} = \frac{L^{\alpha}K^{\beta}}{L} = L^{\alpha-1}K^{\beta}$$

Elasticità della produzione rispetto al lavoro

$$\eta_{YL} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial L}}{\frac{Y}{L}} = \frac{\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta}}{L^{\alpha-1}K^{\beta}} = \alpha$$

Produttività marginale del capitale

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \beta L^{\alpha}K^{\beta-1}$$

La produttività marginale del lavoro diminuisce se $\alpha < 1$ e quella del capitale diminuisce se $\beta < 1$. Infatti entrambe le frazioni diminuiscono all'aumentare del denominatore

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \alpha \frac{K^{\beta}}{L^{1-\alpha}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial Y}{\partial K} = \beta \frac{L^{\alpha}}{K^{1-\beta}}$$

Saggio marginale di sostituzione tecnica

$$\text{MTRS} = \frac{Y'_L}{Y'_K} = \frac{\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta}}{\beta L^{\alpha}K^{\beta-1}} = \frac{\alpha L^{-1}K^{1}}{\beta} = \frac{\alpha K}{\beta L}$$

che diminuisce al crescere di L e al diminuire di $K \Rightarrow$ gli isoquanti sono convessi. Infatti, dato $Y = \overline{Y}$, l'isoquanto assicura $\overline{Y} = L^{\alpha}K^{\beta}$, ovvero $K = \left(\frac{\overline{Y}}{L^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta}}$

Rendimenti di scala

$$(\gamma L)^{\alpha}(\gamma K)^{\beta} = \gamma^{\alpha+\beta}L^{\alpha}K^{\beta} = \gamma^{\alpha+\beta}Y$$

Se $\alpha + \beta > 1 \Rightarrow$ rendimenti di scala crescenti.
Se $\alpha + \beta = 1 \Rightarrow$ rendimenti di scala costanti.
Se $\alpha + \beta < 1 \Rightarrow$ rendimenti di scala decrescenti.