ECONOMIA DELLE RISORSE UMANE (cod. 8327) a.a.2007-2008
ESERCITAZIONE N. 4
da consegnare all'inizio della lezione del 15/05/2008, ore 14:30

ESERCIZIO 1. Selezione avversa nel processo di assunzione

Il concessionario di auto Motors si trova a fronteggiare alcune difficoltà nel processo di assunzione della propria forza vendita. Sebbene infatti voglia selezionare solo lavoratori qualificati, la sua forza lavoro è composta sia da lavoratori qualificati che da lavoratori non qualificati.

Un lavoratore qualificato riesce a vendere 9 auto al giorno, mentre un lavoratore poco qualificato solo 4. Entrambe le tipologie di lavoratori hanno la possibilità di trovare un impiego alternativo. In particolare un venditore non qualificato può guadagnare 4€ al giorno, mentre l'impiego alternativo garantisce al venditore qualificato 7€ al giorno.

La Motors vi contatta per una consulenza per attuare una migliore politica salariale che le consenta di assumere lavoratori qualificati.

a) Scrivete uno schema retributivo legato alla performance che induca i lavoratori qualificati a cercare lavoro presso la Motors e che invece scoraggi l'offerta di lavoro da parte dei lavoratori non qualificati;

Il processo di assunzione della Motors è caraterizzato da asimmetrie informative: l'impresa non conosce ex - ante la produttività del lavoratore che è invece nota a quest'ultimo. Il potenziale lavoratore possiede più informazioni rispetto all'impresa circa la produttività del lavoro: il lavoratore è la parte informata mentre l'impresa la parte non informata. Poichè l'offerta viene fatta dalla parte non informata, l'impresa, il processo di assunzione è caratterizzato da un tipico problema di selezione avversa. E' quindi necessario individuare uno schema retributivo che scoraggi i lavoratori non qualificati dal proporsi all'impresa e, al contrario, induca i lavoratori qualificati a cercare lavoro presso l'impresa.

La produttività dei lavoratori, a seconda che siano qualificati (s) o non qualificati (u), coinciderà con il numero di transazioni concluse giornalmente. Avremo quindi

$$a = \begin{cases} a_s = 9 \\ a_u = 4 \end{cases}$$

L'opzione esterna dei lavoratori è rappresentata dal salario che otterrebbero se invece di essere assunti dalla Motors lavorassero presso un'altra impresa. Sarà quindi:

$$\bar{w} = \begin{cases} w_s = 7 \\ w_u = 4 \end{cases}$$

Il problema dell'impresa è quindi quello di individuare uno schema retributivo legato alla performance (w_p) che contemporaneamente renda il lavoro appetibile per i lavoratori qualificati e non appetibile per i non qualificati. Lo schema retributivo legato alla performance sarà tale che dato il salario w_p, la retribuzione complessiva sarà direttamente proporzionale alla produttività.

Il contratto è conveniente per i lavoratori qualificati se il reddito complessivo ottenuto lavorando presso la Motors è superiore all'opzione esterna, ovvero se:

$$\begin{aligned} w_p \cdot a_s &\geqslant w_s \\ w_p &\geqslant \frac{w_s}{a_s} \end{aligned}$$

e non è conveniente per i non qualificati se il reddito complessivo ottenuto lavorando presso la Motors è inferiore all'opzione esterna, ovvero se::

$$\begin{aligned} w_p \cdot a_u &\leqslant w_u \\ w_p &\leqslant \frac{w_u}{a_u} \end{aligned}$$

Deve pertanto essere soddisfatto il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} w_p \geqslant \frac{w_s}{a_s} \\ w_p \leqslant \frac{w_u}{a_u} \end{cases}$$

e nel nostro caso

$$\begin{cases} w_p \geqslant \frac{7}{9} \\ w_p \leqslant \frac{4}{4} \end{cases}$$

Il salario ottimale offerto deve quidi appartenere all'intervallo

$$\frac{7}{9} \leqslant w_p \leqslant 1$$

Uno schema di questo tipo è quindi possibile se il premio di produttività dei qualificati è superiore al premio pagato dagli impieghi alternativi infatti $\frac{a_s}{a_u} = \frac{9}{4} = 2.25 \geqslant \frac{w_s}{w_u} = \frac{7}{4} = 1.75$

b) Fra i diversi schemi contrattuali che soddisfano la condizione a), cosa suggerireste alla Motors (ex post)?;

Lo schema contrattuale ottimo ex - post sarà:

$$w_P^* = \frac{7}{9} + \epsilon$$

dove ϵ è un valore che tende a zero $(\epsilon \longrightarrow 0)$, un valore piccolo quanto basta per assicurarsi solo la partecipazione dei lavoratori qualificati. E' importante notare che alla base di questo schema c'è l'ipotesi che la produttività dei lavoratori sia osservabile e che i lavoratori conoscano perfettamente le alternative.

c) Supponete ora che ci siano due tipologie di lavoratori non qualificati (A, B). Ogni lavoratore non qualificato conosce la propria "tipologia", ma tale informazione è "nascosta" alla Motors. La tipologia A ha una probabilità del 50% di vendere 4 auto al giorno, mentre la tipologia B ha una probabilità del

50% di venderne 5 al giorno. Come cambierebbero le vostre rispose ai punti a) e b)?;

Se esistono due tipologie di lavoratori non qualificati le possibili produttività saranno:

$$a_u = \begin{cases} a_u^H = 5; & p = 0,5 \\ a_u^L = 4; & p = 0,5 \end{cases}$$

L'impresa dovrà quindi offrire uno schema retributivo che tenga conto del fatto che la produttività dei lavoratori non qualificati è incerta. In particolare essendo il valore atteso della produttività di un lavoratore qualificato:

$$E(a_U) = 0,5 * 5 + 0,5 * 4 = 4,5$$

Un lavoratori non qualificato non ha incentivo a offrire lavoro presso la Motors se:

$$\begin{aligned} w_P * E(a_u) &\leqslant w_u \\ w_P &\leqslant \frac{4}{4.5} = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

Viceversa, la condizione di partecipazione per i lavoratori qualificati resta invariata (i.e.$w_P \geqslant \dfrac{7}{9}$).

Lo schema retribuitivo ottimo deve quindi soddisfare il seguente sistema:

$$\begin{cases} w_p \geqslant \frac{7}{9} \\ w_p \leqslant \frac{8}{9} \end{cases}$$

salario ottimale offerto deve quidi appartenere all'intervallo

$$\frac{7}{9} \leqslant w_p \leqslant \frac{8}{9}$$

Lo schema contrattuale ottimo ex - post resterà immutato

$$\begin{aligned} w_P^* &= \frac{7}{9} + \epsilon \\ \text{con } \epsilon &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

d) Supponete infine che i lavoratori non qualificati credano di avere una produttività di 6 auto vendute al giorno. Cosa suggerireste alla Motors?

In questo caso il contratto legato alla performance non funziona perchè il sistema non ammette soluzioni.

$$\begin{cases} w_p \geqslant \frac{w_s}{a_s} \\ w_p \leqslant \frac{w_u}{a_u} \end{cases}$$

e nel nostro caso

$$\begin{cases} w_p \geqslant \frac{7}{9} = 0.7 \\ w_p \leqslant \frac{4}{6} = 0.6 \end{cases}$$

Non ci sono valori di w_P tali per cui i lavoratori qualificati siano incentivati e partecipare e quelli non qualificati non abbiano incentivo a partecipare. Siamo quindi nel caso in cui il premio di produttività dei qualificati è inferiore al premio pagato dagli impieghi alternativi $\frac{a_s}{a_u} = \frac{9}{6} = 1.5 \leqslant \frac{w_s}{w_u} = \frac{7}{4} = 1.75$

ESERCIZIO 2. Selezione avversa nel processo di assunzione: periodo di prova

Per evitare l'assunzione di personale non qualificato il tour operator Traveller utilizza un periodo di prova per le guide turistiche. Il contratto di lavoro proposto è di sei mesi con un periodo di prova iniziale di due mesi. Supponete che ci siano due tipi di lavoratori: guide turistiche qualificate e non qualificate. Un lavoratore qualificato può trovare un altro lavoro a un salario mensile di 2000€, mentre il lavoratore non qualificato con una probabilità del 50% può trovare un altro lavoro a un salario mensile di1000€ al mese e con una probabilità 50% può ottenere una retribuzione mensile di 1500€. Nei due mesi iniziali la Traveller è in grado di valutare l'effettiva qualità della guida turistica.

a) Scrivete la condizione che assicura che i lavoratori qualificati vogliano effettivamente lavorare per la Traveller. Spiegate il significato di tale condizione;

Il contratto temporaneo prevede che la carriera lavorativa all'interno dell'impresa abbia due periodi distinti:

- un periodo di prova di due mesi a un salario mensile di w_1

- un periodo successivo di quattro mesi in cui il lavoratore riconfermato percepisce un salario mensile di w_2.

I lavoratori posseggono le seguenti *outside options*:

- per i lavoratori qualificati $w_s = 2000$

- per i lavoratori non qualificati $w_u = \begin{cases} w_u^L = 1000 & \text{se } p = 0.5 \\ w_u^H = 1500 & \text{se } p = 0.5 \end{cases}$

Il vincolo di partecipazione per i lavoratori qualificati è:

$$\begin{aligned} 2w_1 + 4w_2 &\geq 6w_s \\ 2w_1 + 4w_2 &\geq 6 \cdot 2000 \\ 2w_1 + 4w_2 &\geq 12.000 \end{aligned}$$

Un lavoratore qualificato è incentivato a lavorare per il tour operator se il salario totale percepito nel periodo di prova ($2w_1$) e in quello di conferma ($4w_2$) è superiore al salario totale che percepirebbe se non lavorasse per la Traveller ($6w_s = 12.000$).

b) Scrivete la condizione che assicura che i lavoratori non qualificati non vogliano lavorare per la Traveller. Spiegate il significato di tale condizione;

Il vincolo di non partecipazione dei lavoratori non qualificati è:

$$\begin{aligned}
2w_1 + 4w_u &\leq 6w_u \\
2w_1 + 4\left[0.5 \cdot w_u^L + 0.5 \cdot w_u^H\right] &\leq 6\left[0.5 \cdot w_u^L + 0.5 \cdot w_u^H\right] \\
2w_1 + 4\left[0.5 \cdot 1000 + 0.5 \cdot 1500\right] &\leq 6\left[0.5 \cdot 1000 + 0.5 \cdot 1500\right] \\
2w_1 + 4\left[500 + 750\right] &\leq 6\left[500 + 750\right] \\
2w_1 + 4 \cdot 1.250 &\leq 6 \cdot 1.250 \\
2w_1 &\leq 2.500 \\
w_1 &\leq 1.250
\end{aligned}$$

Un lavoratore non qualificato non ha incentivo a lavorare per il tour operatore se il salario totale percepito nel periodo di prova ($2w_1$) e in quello successivo una volta che la sua effettiva abilità è nota (che quindi coincide con la sua *outside option* dato che una volta che la sua effettiva abilità è nota il contratto non viene trasformato in permanente) ($6 \cdot w_u = 6\left[0.5 \cdot w_u^L + 0.5 \cdot w_u^H\right]$) è inferiore al salario totale che percepirebbe se non lavorasse per il tour operator ($6\left[0.5 \cdot w_u^L + 0.5 \cdot w_u^H\right]$).

c) Trovate i valori del salario per il periodo di prova e del salario per i mesi successivi che permettono di risolvere il problema di selezione avversa;

I valori del salario nei due periodi che permettono di risolvere il problema della selezione avversa devono soddisfare il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 2w_1 + 4w_2 \geq 12.000 \\ w_1 \leq 1.250 \end{cases}$$

Assumendo che se indifferenti tra il posto di lavoro e l'alternativa i qualificati scelgano il lavoro mentre i non qualificati scelgano l'alternativa, il problema di selezione avversa è risolto se sia il vincolo di partecipazione dei qualificati sia il vincolo di non partecipazione dei non qualificati sono soddisfatti come uguaglianza.

Avremo quindi:

$$\begin{cases} 2w_1 + 4w_2 = 12.000 \\ w_1 = 1.250 \end{cases}$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases} 2 \cdot 1.250 + 4w_2 = 12.000 \\ w_1 = 1.250 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4w_2 = 12.000 - 2.500 \\ w_1 = 1.250 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4w_2 = 9.500 \\ w_1 = 1.250 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_2 = 2.375 \\ w_1 = 1.250 \end{cases}$$

Nel primo periodo i salari devono essere pari all'*expected outside option* dei lavoratori non qualificati così che questi non avranno incentivo a lavorare presso il tour operator. Nel periodo successivo il salario deve essere superiore all'*outside option* dei lavoratori qualificati. Nel secondo periodo infatti il lavoratore qualificato percepirà la sua *outside option* aumentata di un *compensation premium* per il mancato guadagno nel primo periodo.

d) Supponete ora che il periodo di prova sia meno efficace nel permettere alla Traveller di valutare l'effettiva abilità dei lavoratori. In particolare una guida turistica non qualificato ha il 50% di probabilità di superare il periodo di prova e di accedere quindi al periodo successivo ed al relativo salario. Come dovrebbe cambiare la politica salariale del giornale per garantire che i lavoratori non qualificati non vengano assunti?;

Il vincolo di partecipazione per i lavoratori qualificati resta invariato, quello di non partecipazione per i non qualificati invece diventa:

$$2w_1 + 4\left[0.5 \cdot w_2 + 0.5 \cdot E(w_u)\right] \leq 6E(w_u)$$

Notiamo come il salario nel secondo periodo sia una media tra il salario che si otterrebbe se si venisse erroneamente promossi e il salario esterno.

Risolvendo otteniamo:

$$\begin{aligned}
2w_1 + 4\left[0.5 \cdot w_2 + 0.5 \cdot (0.5 \cdot 1000 + 0.5 \cdot 1500)\right] &\leq 6(0.5 \cdot 1000 + 0.5 \cdot 1500) \\
2w_1 + 2w_2 + 2 \cdot 1.250 &\leq 6 \cdot 1250 \\
2w_1 + 2w_2 &\leq 4 \cdot 1250 \\
w_1 + w_2 &\leq 2.500
\end{aligned}$$

Il problema di selezione avversa sarà quindi risolto se

$$\begin{cases} 2w_1 + 4w_2 = 12.000 \\ w_1 + w_2 = 2.500 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1 + 2w_2 = 6.000 \\ w_1 + w_2 = 2.500 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_2 = 3.500 \\ w_1 + 3.500 = 2.500 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_2 = 3.500 \\ w_1 = -1.000 \end{cases}$$

e) Interpretate le differenze fra gli schemi salariali trovati ai precedenti punti c) e d);

Il salario nel periodo di prova è notevolmente inferiore all'*outside option* dei lavoratori non qualificati mentre il salario nel periodo successivo è notevolmente superiore all'*outside option* dei lavoratori qualificati. Nel primo periodo i lavoratori incorrono in perdite ma nel periodo successivo il salari è notevolmente superiore per compensarli dei mancati guadagni.

f) Supponete infine che il periodo di prova diventi meno efficiente anche per i lavoratori qualificati. Con probabilità 40% La Traveller confonde una guida qualificata per una non qualificato e la licenzia dopo i due mesi di prova. Come si dovrebbe modificare la struttura salariale del contratto per mantenere una situazione in cui solo i lavoratori qualificati si candidano per lavorare alla Traveller?

Il vincolo di partecipazione per i lavoratori non qualificati resta invariato, quello di partecipazione per i qualificati invece diventa:

$$\begin{aligned} 2w_1 + 4E(w_2) &\leq 6w_s \\ 2w_1 + 4\left[0.4 \cdot w_s + 0.6 \cdot w_2\right] &\leq 12.000 \\ 2w_1 + 4\left[0.4 \cdot 2000 + 0.6 \cdot w_2\right] &\leq 12.000 \\ 2w_1 + 3.200 + 2,4w_2 &\leq 12.000 \\ 2w_1 + 2,4w_2 &\leq 8.800 \end{aligned}$$

Il problema di selezione avversa sarà quindi risolto se

$$\begin{cases} 2w_1 + 2,4w_2 = 8.800 \\ w_1 + w_2 = 2.500 \end{cases}$$
$$\begin{cases} w_1 + 1,2w_2 = 4.400 \\ w_1 = 2.500 - w_2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2.500 - w_2 + 1,2w_2 = 4.400 \\ w_1 = 2.500 - w_2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0,2w_2 = 1.900 \\ w_1 = 2.500 - w_2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} w_2 = 9.500 \\ w_1 = -7.000 \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. Selezione avversa nel processo di assunzione: credenziali - istruzione

Il panificio Il grano vuole assumere un nuovo addetto per la panificazione. L'impresa non osserva la vera qualità del lavoratore sebbene sappia che la produttività varia a livello individuale ed è nota solo al lavoratore. In particolare un lavoratore altamente produttivo ha un output $a_H = 5$ mentre un lavoratore poco produttivo ha un output $a_L = 1$. Il grano tuttavia sa che la probabilità di assumere un lavoratore poco produttivo è dell' 70% mentre quella di assumere un lavoratore produttivo è del 30%.

I panettieri hanno la possibilità di segnalare la propria abilità facendo un corso di formazione professionale, che comporta un costo ma che garantirà maggiori redditi futuri.

Assumete anche che la funzione di utilità del lavoratore sia

$$U = w - \frac{(\delta m)}{a_i}$$

dove $m = 1$ se il lavoratore ha completato il corso di formazione professionale, mentre $m = 0$ se il lavoratore non ha completato il corso ; w è il salario, a_i il livello di produttività e δ è un parametro (comune ad entrambe le tipologie di lavoratori) che indica il costo di seguire il costo di formazione.

a) Assumete che per il panificio la probabilità condizionata all'educazione di avere un lavoratore poco produttivo sia 0.7 (i.e. $p(a = a_L|m = 1) = 0.7$) e che il costo del corso di specializzazione sia 5 . Quale sarà il salario di equilibrio?;

Poichè l'impresa crede che la percentuale di lavoratori altamente produttivi che ha frequentato il corso di fromazione sia uguale alla percentuale di lavoratori altamente produttivi nella popolazione, la produttività attesa dei lavoratori che hanno frequentato il corso sarà uguale alla produttività attesa dei lavoratori che non hanno frequentato il corso. Di conseguenza anche i salari che l'impresa offrirà ai lavoratori con e senza il corso saranno uguali e pari alla produttività media:

$$\begin{aligned}
\overline{w} &= E(MP_L) \\
\overline{w} &= pa_H + (1-p)a_L \\
\overline{w} &= 0.3 \cdot 5 + 0.7 \cdot 1 \\
\overline{w} &= 2.2
\end{aligned}$$

in equilibrio il salario offerto sarà uguale al salario medio indipendentemente dal livello di istruzione:

$$w^* = w(0) = w(1) = \overline{w}$$

b) In base al salario di equilibrio trovato al punto a), quale sarà la decisione del lavoratore circa il corso di formazione? Giustificate brevemente la vostra risposta. Quali saranno i profitti attesi del panificio?;

Entrambi gli individui non avranno incentivo a studiare in quanto non esiste alcun *wage premium* connesso all'educazione: l'istruzione non ha nessun valore come segnale. Avremo quindi un *pooling equilibrium* caratterizzato da:

$$\begin{aligned}
m(H) &= m(L) = 0 \\
p(a &= a_L|m = 1) = 0.7 \\
p(a &= a_H|m = 1) = 0.3 \\
w(0) &= w(1) = \overline{w}
\end{aligned}$$

I profitti attesi saranno nulli perchè il salario è uguale alla produttività media.

c) Assumete ora che l'impresa ritenga plausibile che non ci siano lavoratori poco produttivi fra coloro che hanno completato il corso di formazione ($p(a =$

$a_L|m = 1) = 0$). *Quale sarà la strategia dell'impresa in questo caso? E quale quella del lavoratore circa il corso?*

Il vincolo di autoselezione per i lavoratori altamente produttivi sarà:

$$\begin{aligned} U_H(m &= 1) \geq U_H(m = 0) \\ w(1) - \frac{\delta}{a_H} &\geq w(0) - 0 \\ w(1) - \frac{5}{5} &\geq w(0) \\ w(1) &\geq w(0) + 1 \end{aligned}$$

Il vincolo di autoselezione per i lavoratori non qualificati:

$$\begin{aligned} U_L(m &= 0) \geq U_L(m = 1) \\ w(0) - 0 &\geq w(1) - \frac{\delta}{a_L} \\ w(0) &\geq w(1) - \frac{5}{1} \\ w(0) &\geq w(1) - 5 \end{aligned}$$

Il vincolo di partecipazione per il datore di lavoro richiede che in concorrenza perfetta il salario sia uguale alla produttività marginale del lavoro ($w = MP_L$)

$$\begin{aligned} w(0) &= 1 \\ w(1) &= 5 \end{aligned}$$

Il sistema da risolvere è dunque

$$\begin{cases} w(0) = 1 \\ w(1) = 5 \\ w(0) \geq w(1) - 5 \\ w(1) \geq w(0) + 1 \end{cases}$$

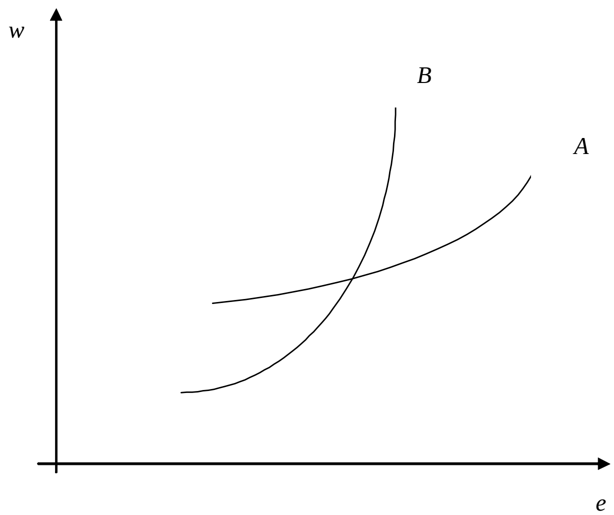
La coppia $w(0) = 1$ e $w(1) = 5$ soddisfa tutti i vincoli. L'impresa offrirà un salario superiore per gli individui che hanno seguito il corso di formzione e inferiore a quelli che non l'hanno seguito: abbiamo un *separating equilibrium* poichè il costo dell'istruzione risulta inferiore per i lavoratori che hanno produttività superiore.

ESERCIZIO 4. Retribuzioni ottimali

L'impresa The Sun vende occhiali da sole ad un prezzo unitario di 16. L'impresa utilizza nel proprio processo produttivo due tipi di lavoratori, A e B, pagati con un sistema piece - rate (a pezzo). Assumete che non ci sia incertezza e che le vendite segnalino perfettamente e completamente l'impegno del lavoratore: se l'impegno profuso dal lavoratore è pari ad e The Sun vende e *occhiali da sole. Assumete che le funzione di utilità dei due tipi di lavoratori siano le seguenti:*

$$U_A = w - \frac{e^2}{2}$$
$$U_B = w - 2e^2$$

a) Nel piano (e, w), disegnate le due curve di indifferenza dei lavoratori (curva di indifferenza A, curva di indifferenza B). Discutete l'inclinazione e la forma delle curve di indifferenza. Quale lavoratore definireste "gran lavoratore" e quale "un pigro"? Discutete;



Ricordiamo che la (dis)utilità marginale dell'impegno misura la diminuzione di utilità conseguente all'incremento di una unità dell'impegno profuso. Nel caso in esame avremo:

$$\frac{\partial U_A}{\partial e} = -e$$
$$\frac{\partial U_B}{\partial e} = -4e$$

Utilità marginale del salario sarà invece:

$$\frac{\partial U_A}{\partial w} = \frac{\partial U_B}{\partial w} = 1$$

L'inclinazione delle curve di indifferenza saranno quindi:

$$\frac{\Delta w}{\Delta e} = -\frac{MU_e}{MU_w} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial e}}{\frac{\partial U}{\partial w}}$$

ovvero :

$$\begin{aligned} A &: -\frac{MU_e}{MU_w} = -\frac{-e}{1} = e \\ B &: -\frac{MU_e}{MU_w} = -\frac{-4e}{1} = 4e \end{aligned}$$

La curva di indifferenza dell'individuo A è più piatta di quella dell'individuo B. L'individuo A può essere definito un gran lavoratore in quanto per mantenere inalterato il suo livello di utilità se incrementa lo sforzo di una unità deve percepire un salario pari all'incremento di sforzo. Viceversa il lavoratore B è pigro in quanto per compensarlo dell'incremento di una unità dello sforzo profuso è necessario un incremento di salario pari a 4 volte lo sforzo.

b) Supponete che l'impresa fissi la componente variabile del salario a 12€ a occhiale. Quanti occhiali produrrà il lavoratore A*? Quanti il lavoratore* B*?;*

Il salario corrisposto sarà quindi proporzionale allo sforzo e avremo:

$$w = 12e$$

Il singolo lavoratore produce un numero di occhiali in corrispondenza del quale massimizza la propria utilità dato il salario percepito. Formalmente il singolo lavoratore risolve il seguente problema di ottimizzazione:

$$\begin{aligned} & \underset{e}{Max} U_i \\ s.to\ \ w &= 12e \end{aligned}$$

Per il lavoratore A avremo:

$$\begin{aligned} \underset{e}{Max} U_A &= w - \frac{e^2}{2} \\ s.to\ \ w &= 12e \end{aligned}$$

ovvero

$$\underset{e}{Max} U_A = 12e - \frac{e^2}{2}$$

da cui otteniamo la seguente condizione del primo ordine:

$$\begin{aligned} 12 - e &= 0 \\ e_A^* &= 12 \end{aligned}$$

Per il lavoratore B avremo:

$$
\begin{aligned}
\underset{e}{Max} U_B &= w - 2e^2 \\
s.to \;\; w &= 12e
\end{aligned}
$$

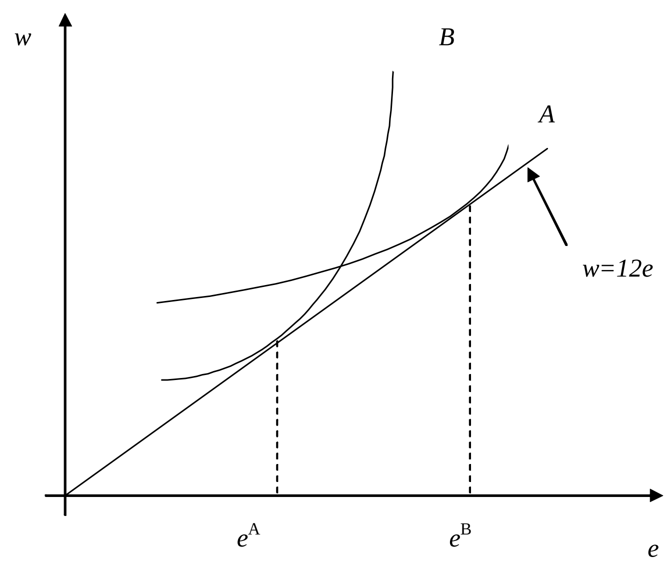
ovvero

$$\underset{e}{Max} U_B = 12e - 2e^2$$

da cui otteniamo la seguente condizione del primo ordine:

$$
\begin{aligned}
12 - 4e &= 0 \\
e_B^* &= 3
\end{aligned}
$$

c) Rappresentate la soluzione del punto precedente nel piano (e, w)*;*
Graficamente la soluzione può essere così rappresentata:



d) Quale sarà il profitto totale dell'impresa?;
I profitti ottenuti dall'impresa impiegando il lavoratore A saranno:

$$\Pi_A = (16 - 12) \cdot 12 = 48$$

I profitti ottenuti dall'impresa impiegando il lavoratore B saranno:

$$\Pi_B = (16 - 12) \cdot 3 = 12$$

I profitti totali saranno:

$$\Pi = \Pi_A + \Pi_B = 48 + 12 = 60$$

Supponete ora che The Sun voglia cambiare il proprio schema retributivo per incrementare i profitti. Ritiene quindi di adottare uno schema retributivo che prevede una parte fissa del salario (x), il salario base, e una componente variabile legata alla performance.

$$w = x + 16e$$

e) Quanti occhiali produrranno e venderanno i lavoratori A e B sotto questo schema (lasciate x parametrico)? La produzione dipende da x? Motivate la vostra risposta;

Anche in questo caso il singolo lavoratore produce un numero di occhiali in corrispondenza del quale massimizza la propria utilità dato il salario percepito. Formalmente il singolo lavoratore risolve il seguente problema di ottimizzazione:

$$\begin{aligned} & \underset{e}{Max} U_i \\ s.to \;\; w &= x + 16e \end{aligned}$$

Per il lavoratore A avremo:

$$\begin{aligned} \underset{e}{Max} U_A &= w - \frac{e^2}{2} \\ s.to \;\; w &= x + 16e \end{aligned}$$

ovvero

$$\underset{e}{Max} U_A = x + 16e - \frac{e^2}{2}$$

da cui otteniamo la seguente condizione del primo ordine:

$$\begin{aligned} 16 - e &= 0 \\ e_A^* &= 16 \end{aligned}$$

Per il lavoratore B avremo:

$$\begin{aligned} \underset{e}{Max} U_B &= w - 2e^2 \\ s.to \;\; w &= x + 16e \end{aligned}$$

ovvero

$$\underset{e}{Max} U_B = x + 16e - 2e^2$$

da cui otteniamo la seguente condizione del primo ordine:

$$\begin{aligned} 16 - 4e &= 0 \\ e_B^* &= 4 \end{aligned}$$

In equilibrio, il lavoratore A produrrà 16 occhiali mentre il lavoratore B 4 . Lo sforzo non dipende in equilibrio dalla componente fissa del salario. La produzione totale di occhiali sarà:

$$y = e_A^* + e_B^* = 16 + 4 = 20$$

La produzione totale non dipende da x, dalla parte fissa del salario (salario base) poichè è uguale per entrambi i lavoratori.

f) Assumete che entrambi i lavoratori abbiano un'opzione di lavorare altrove pari a 10€. Quale sarà il valore ottimale di x che l'impresa dovrà fissare per ciascuno dei due lavoratori? Discutete;

La componente fissa del salario, dato il livello ottimo di sforzo per il singolo individuo, deve essere tale da indurlo a preferire il lavoro presso l'impresa piuttosto che l'opzione esterna. Il lavorare presso *The Sun* è conveniente se è soddisfatto il vincolo di partecipazione:

$$U_i(w^e(e_i^*), e_i^*) \geq \overline{U}$$

Avremo quindi per il lavoratore A:

$$\begin{aligned} x_A + 16e_A^* - \frac{e_A^{*2}}{2} &\geq U \\ x_A + 16 \cdot 16 - \frac{(16)^2}{2} &\geq 10 \\ x_A &\geq +10 - 256 + 128 \\ x_A &\geq -118 \end{aligned}$$

Avremo quindi per il lavoratore B:

$$\begin{aligned} x_B + 16e_B^* - 2e_B^{*2} &\geq U \\ x_B + 16 \cdot 4 - 2 \cdot (4)^2 &\geq 10 \\ x_B &\geq -64 + 32 + 10 \\ x_B &\geq -22 \end{aligned}$$

g) Quale sarà il profitto totale per The Sun? Il nuovo schema retributivo si è rilevato profittevole?

Implementando questo nuovo schema otterrà i seguenti profitti

$$\Pi = 118 + 22 = 140$$

L'impresa con il nuovo schema riuscirà ad incrementare i profitti.

ESERCIZIO 5. Retribuzioni ottimali

La Swim è un'impresa di abbigliamento che produce costumi da bagno che vende a un prezzo unitario di 16. L'impresa deve scegliere lo schema retributivo da applicare ai propri operai. L'impresa sta valutando uno schema che prevede un salario legato alla performance. Il datore di lavoro sa che il numero di costumi prodotti e venduti dipende direttamente dall'impegno del lavoratore (relazione 1 a 1). Formalmente, dato l'impegno e, l'impresa vende esattamente e costumi. Assumete che la funzione di utilità del lavoratore sia:

$$U = w - \frac{\delta e^2}{2}$$

dove il parametro δ rappresenta la disutilità marginale dell'impegno ed è pari a 4.

a) Se l'impresa decidesse di pagare il lavoratore con una retribuzione completamente variabile e legata alla performance, che paga 12€ per ciascun costume prodotto e venduto. Quale sarà il numero di costumi prodotti e venduti?;

Il salario corrisposto sarà quindi proporzionale allo sforzo e avremo:

$$w = 12e$$

L'impresa produce e vende un numero di costumi in corrispondenza del quale il lavoratore massimizza la propria utilità dato il salario percepito. Formalmente il problema di ottimizzazione:

$$\begin{aligned} & \underset{e}{Max} U = w - \frac{\delta e^2}{2} \\ s.to \;\; w &= 12e \end{aligned}$$

ovvero

$$\underset{e}{Max} 12e - \frac{4e^2}{2} = 12e - 2e^2$$

da cui otteniamo la seguente condizione del primo ordine:

$$\begin{aligned} 12 - 4e &= 0 \\ e^* &= 3 \end{aligned}$$

La Swim produce e vende 3 costumi.

b) Assumete che il lavoratore possa lavorare altrove ottenendo 10. Ritenete che accetterà di lavorare con lo schema retributivo descritto al punto a)?;

Il lavoratore accetta di lavorare per *La Swim* se il livello di utilità che ottiene è superiore a quello che otterrebbe se lavorasse presso un'altra impresa. Il vincolo di partecipazione è:

$$\begin{aligned} U(w^e(e^*), e^*) &\geq \overline{U} \\ 12 \cdot 3 - \frac{4 \cdot 3^2}{2} &\geq 10 \\ 36 - 18 &\geq 10 \\ 18 &\geq 10 \end{aligned}$$

Poichè il vincolo di partecipazione è soddisfatto il lavoratore accetterà di lavorare con lo schema lavorativo proposto da *La Swim.*

c) A quanto ammonteranno i profitti dell'impresa?;

I profitti dell'impresa saranno:

$$\Pi = (16 - 12) \cdot 3 = 12$$

d) Supponete invece che venga suggerito al datore di lavoro uno schema salariale alternativo che prevede:

$$w = k + he$$

dove k è il salario base, h è il salario per pezzo ed e è il numero di costumi prodotti. Se l'opzione esterna del lavoratore resta 10€, a quali condizioni il lavoratore sarà disposto a lavorare per La Swim? Quale sarà il numero di costumi prodotti e venduti in questo caso?;

Anche in questo caso l'impresa produce e vende un numero di costumi in corrispondenza del quale il lavoratore massimizza la propria utilità dato il salario percepito. Formalmente il problema di ottimizzazione sarà:

$$\begin{aligned} & \underset{e}{Max} U = w - \frac{\delta e^2}{2} \\ s.to \;\; w &= k + he \end{aligned}$$

ovvero

$$\underset{e}{Max} k + he - \frac{4e^2}{2} = k + he - 2e^2$$

da cui otteniamo la seguente condizione del primo ordine:

$$\begin{aligned} h - 4e &= 0 \\ e^* &= \frac{h}{4} \end{aligned}$$

La Swim produce e vende $\frac{h}{4}$costumi: la produzione dipende dal salario per racchetta prodotta.

e) Derivate il valore ottimale di k e h . Calcolate i profitti dell'impresa. Comparate il vostro risultato con quello al punto c). Discutete le differenze. Quale schema salariale suggerireste all'impresa di adottare?

Il lavoratore accetta di lavorare per *La Swim* se il livello di utilità che ottiene è superiore a quello che otterrebbe se lavorasse presso un'altra impresa. Il vincolo di partecipazione è:

$$\begin{aligned} U(w^e(e^*), e^*) &\geq \overline{U} \\ k + he - \frac{4e^2}{2} &\geq 10 \end{aligned}$$

Il lavoratore accetta di lavorare se e solo se $k + he - \frac{4e^2}{2} \geq 10$, vincolo di partecipazione.

Per trovare il valore di ottimo per k e h, l'impresa deve risolvere un problema di massimizzazione vincolata del profitto, dove i vincoli sono costituiti dal vincolo di partecipazione (1) e dal vincolo di incentivo compatibilità (2) per il lavoratore.

$$\begin{aligned} & Max 16e - (k + he) \\ & s.t. \\ (1)\ k + he - \frac{4e^2}{2} &\geq 10 \\ (2)\ \ e &= \frac{h}{4} \end{aligned}$$

Sostituendo i due vincoli il problema di massimizzazione può essere riscritto come:

$$\begin{aligned} & Max 16\frac{h}{4} - (k + h\frac{h}{4}) \\ & s.t. \\ (1)\ k + h\frac{h}{4} - \frac{4(\frac{h}{4})^2}{2} &\geq 10 \Longleftrightarrow k + \frac{h^2}{8} \geq 10 \end{aligned}$$

ovvero

$$\underset{e}{Max} 16\frac{h}{4} - (10 - \frac{h^2}{8} + \frac{h^2}{4}) = 4h - 10 + \frac{h^2}{8}$$

da cui otteniamo la seguente condizione del primo ordine:

$$\begin{aligned} 4 - \frac{2}{8}h &= 0 \\ h^* &= \frac{8 \cdot 4}{2} = 16 \end{aligned}$$

Sostituendo il valore ottimo h^* nel vincolo di partecipazione troviamo:

$$\begin{aligned} k + \frac{16^2}{8} &\geqslant 10 \\ k^* &= 10 - 32 = -22 \end{aligned}$$

Lo schema salariale ottimo sarà quindi:

$$w = -22 + 16e$$

Dato i valori ottimi di k e h, troviamo che $e^* = \frac{h}{4} = \frac{16}{4} = 4$
I profitti dell'impresa saranno:

$$\begin{aligned} \Pi &= RT - CT = \\ &= 16 \cdot 4 - (-22 + 16 \cdot 4) \\ &= 64 + 22 - 64 \\ &= 22 \end{aligned}$$

Per La Swim è conveniente adottare questo nuovo schema retributivo perchè le consente di incrementare i profitti di 10 (da 12 passano a 22).

ESERCIZIO 6. Retribuzioni ottimali

Time produce orologi e assume un operaio specializzato la cui funzione di utilità è

$$U = E(w) - e^2$$

dove $E(w)$ è la retribuzione media mentre e è lo sforzo richiesto per produrre gli orologi. Assumete che il numero di orologi prodotti, x, dipenda dall'impegno (e) e da un fattore casuale (η) con media 0 e varianza v:

$$x = e\ (1 + \eta)$$

Il prezzo di un orologio è €40 e il lavoratore non ha alcuna offerta alternativa cosicché la sua utilità se non accetta il lavoro alla Time è pari a 0. La retribuzione è costituita da una parte fissa α e da un bonus β per ciascun orologio venduto. Supponete che non ci siano vincoli istituzionali e che il salario possa essere strutturato liberamente.

a) Calcolate la media e la varianza dell'output e della retribuzione;

Dato lo schema compensativo proposto, la retribuzione sarà:

$$w = \alpha + \beta x = \alpha + \beta(e(1 + \eta))$$

la media sarà quindi:

$$\begin{aligned}
E(w) &= E(\alpha+\beta(e(1+\eta))) \\
&= E(\alpha)+E(\beta(e(1+\eta)) \\
&= E(\alpha)+E(\beta(e+e\eta)) \\
&= E(\alpha)+E(\beta e)+E(e\eta) \\
&= \alpha+\beta e+e\cdot 0 \\
&= \alpha+\beta e
\end{aligned}$$

la varianza sarà :

$$\begin{aligned}
Var(w) &= Var(\alpha+\beta(e(1+\eta))) \\
&= \beta^2 e^2 v
\end{aligned}$$

Dato l'output

$$x = e\ (1+\eta)$$

la media sarà quindi:

$$\begin{aligned}
E(x) &= E(e+e\eta) \\
&= E(e)+E(e\eta) \\
&= e
\end{aligned}$$

la varianza sarà :

$$\begin{aligned}
Var(x) &= Var(e+e\eta) \\
&= e^2 v
\end{aligned}$$

b) Calcolate il livello ottimale dell'impegno del lavoratore. Quanti orologi in media saranno venduti?;

Il lavoratore sceglie un livello di impegno che gli consente di massimizzare la sua utilità. Il problema di ottimizzazione sarà:

$$\begin{aligned}
& \underset{e}{Max} E(w) - e^2 \\
s.to\quad E(w) &= \alpha+\beta e
\end{aligned}$$

ovvero:

$$\underset{e}{Max} \alpha+\beta e - e^2$$

da cui otteniamo la seguente condizione del primo ordine:

$$\begin{aligned}
\beta - 2e &= 0 \\
e^* &= \frac{\beta}{2}
\end{aligned}$$

In media saranno prodotti e venduti $x = e^* = \frac{\beta}{2}$ orologi.

c) Derivate la condizione che assicura che il lavoratore accetti di lavorare presso Time. Spiegate il significato economico di tale condizione;

Il lavoratore accetterà la posizione offerta da *Time* se ottiene un livello di utilità superiore a quello che otterrebbe se non accettasse (in questo caso il lavoratore accetta se ottiene un livello di utilità non negativo dato che se decidesse di non lavorare per Time non riuscirebbe ad ottenere un impiego alternativo per ipotesi). Il vincolo di partecipazione dell'operaio sarà quindi:

$$\begin{aligned}
U &\geq \overline{U} \\
E(w) - e^2 &\geq 0 \\
\alpha + \beta e - e^2 &\geq 0
\end{aligned}$$

e sostituendo il livello ottimo di impegno $e^* = \frac{\beta}{2}$ avremo:

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^2}{4} &\geq 0 \\
\alpha + \frac{\beta^2}{2} - \frac{\beta^2}{4} &\geq 0 \\
\alpha + \frac{\beta^2}{4} &\geq 0
\end{aligned}$$

d) Calcolate il livello ottimale della parte fissa del salario. Di che tipo di contratto si tratta?;

Per trovare i valori ottimali per α *e* β, l'impresa deve risolvere un problema di massimizzazione vincolata del profitto atteso, dove i vincoli sono costituiti dal vincolo di partecipazione (P) e dal vincolo di incentivo compatibilità (IC) per il lavoratore.

I profitti attesi saranno:

$$\begin{aligned}
E(\Pi) &= px^e - w^e = 40E\left[e(1+\eta)\right] - E(w) \\
&= 40e - \alpha - \beta e
\end{aligned}$$

Il problema di massimizzazione diventa:

$$\begin{aligned} & Max\ 40e-\alpha-\beta e \\ & s.t. \\ (P) \quad \alpha+\frac{\beta^2}{4} &= 0 \\ (IC) \quad e &= \frac{\beta}{2} \end{aligned}$$

Ovvero

$$\begin{aligned} & Max\ 40e-\alpha-\beta e \\ & s.t. \\ (P)\ \alpha &= -\frac{\beta^2}{4} \\ (IC)\ e &= \frac{\beta}{2} \end{aligned}$$

$$\underset{h}{Max} 40\frac{\beta}{2}+\frac{\beta^2}{4}-\beta\frac{\beta}{2}=20\beta+\frac{\beta^2}{4}-\frac{\beta^2}{2}=20\beta-\frac{\beta^2}{4}$$

da cui otteniamo la seguente condizione del primo ordine:

$$\begin{aligned} 20-\frac{1}{2}\beta &= 0 \\ \beta^* &= 40 \end{aligned}$$

e quindi

$$\alpha=-\frac{1600}{4}=-400$$

e) Quale è il livello di bonus (β) ottimale? Quale è il livello α ottimale?;
Dato

$$\begin{aligned} \alpha^* &= -400 \\ \beta^* &= 40 \end{aligned}$$

lo schema retributivo ottimo sarà:

$$\begin{aligned} w &= \alpha+\beta x \\ &= -400+40(e(1+\eta)) \end{aligned}$$

f) Quale sarà il livello dei profitti? Distinguete tra la parte variabile dei profitti e la parte fissa.

Avremo quindi che

$$e^* = \frac{\beta^*}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

I profitti dell'impresa saranno quindi $E(\Pi) = 40e - \alpha + \beta e = 40 \cdot 20 + 400 + 40 \cdot 40 = 800 + 400 + 1600 = 2800$

Supponete ora che l'utilità del lavoratore sia:

$$U = E(w) - 0.5Var(w) - e^2$$

g) Calcolate il livello ottimale dell'impegno del lavoratore in questo caso. Quanti orologi in media saranno venduti?;

Il nuovo lavoratore è avverso al rischio e sceglie un livello di impegno tale che:

$$\begin{aligned} & \underset{e}{Max} E(w) - 0.5Var(w) - e^2 \\ s.to \quad E(w) \quad = \quad & \alpha + \beta e \end{aligned}$$

ovvero:

$$\underset{e}{Max} \alpha + \beta e - 0.5\beta^2 e^2 v - e^2$$

da cui otteniamo la seguente condizione del primo ordine:

$$\begin{aligned} \beta - \beta^2 ve - 2e &= 0 \\ (\beta^2 v + 2)e &= \beta \\ e^* &= \frac{\beta}{(\beta^2 v + 2)} \end{aligned}$$

Il nuovo lavoratore sceglie un livello di impegno inferiore.

h) Calcolate il livello ottimale della parte fissa del salario. Di che tipo di contratto si tratta? Commentate il risultato confrontandolo con quanto ottenuto al punto c).

Il vincolo di partecipazione del nuovo opeario sarà:

$$\begin{aligned} U &\geq \overline{U} \\ E(w) - 0.5Var(w) - e^2 &\geq 0 \\ \alpha + \beta e - 0.5\beta^2 e^2 v - e^2 &\geq 0 \\ \alpha + \beta e - (0.5\beta^2 v + 1)e^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Notiamo come la presenza dell'avversione al rischio (λ) modifica il vincolo di partecipazione così che lo schema retributivo proposto diventa meno attrattivo (il livello di utilità conseguito accettando il posto di lavoro è quello che si avrebbe se l'individuo fosse neutrale).

Per trovare i valori ottimali per α e β, l'impresa deve risolvere un problema di massimizzazione vincolata del profitto atteso, dove i vincoli sono costituiti dal vincolo di partecipazione (P) e dal vincolo di incentivo compatibilità (IC) per il lavoratore.

$$\begin{aligned}
& & & Max\ px^e - w^e = 40x^e - w^e = 40e - \alpha - \beta e \\
& & & s.t. \\
(P)\ & \alpha & = \ & -\beta e + \frac{1}{2}\beta^2 e^2 v + e^2 \\
(IC)\ & e & = \ & \frac{\beta}{(\beta^2 v + 2)}
\end{aligned}$$

Il problema diventa

$$\begin{aligned}
& & & Max\ \ 40e + \beta e - \frac{1}{2}\beta^2 e^2 v - e^2 - \beta e \\
& & & s.t. \\
(IC)\ & e & = \ & \frac{\beta}{\beta^2 v + 2}
\end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned}
& \underset{\beta}{Max}\ \ 40\frac{\beta}{\beta^2 v + 2} - \frac{1}{2}\beta^2 \left(\frac{\beta}{\beta^2 v + 2}\right)^2 v - \left(\frac{\beta}{\beta^2 v + 2}\right)^2 \\
& Max\ \frac{80\beta(\beta^2 v + 2) - \beta^4 v - 2\beta^2}{2(\beta^2 v + 2)^2} \\
& Max\ \frac{80\beta(\beta^2 v + 2) - 2\beta^2(\beta^2 v + 2)}{2(\beta^2 v + 2)^2} \\
& Max\ \frac{\beta(\beta^2 v + 2)(80 - 2\beta)}{2(\beta^2 v + 2)^2} \\
& Max\ \frac{\beta(40 - \beta)}{(\beta^2 v + 2)} \\
& Max\ \frac{40\beta - \beta^2}{\beta^2 v + 2}
\end{aligned}$$

La condizione del primo ordine necessaria per avere un massimo è:

$$\begin{aligned}
\frac{(40-2\beta)(\beta^2 v+2)-(40\beta-\beta^2)2v\beta}{(\beta^2 v+2)^2} &= 0\\
40\beta^2 v+80-2\beta^2 v-4\beta-80\beta^2 v+2\beta^2 v &= 0\\
-40\beta^2 v-4\beta+80 &= 0\\
10\beta^2 v+\beta-20 &= 0
\end{aligned}$$

da cui otteniamo

$$\beta=\frac{-1\pm\sqrt{1+800v}}{20v}$$

Avremo quindi due possibili schemi salariali a seconda che $\beta_1=\beta_1^*>0$ e $\beta_2=\beta_2^*<0$.

i) Quale è il livello di bonus (β) *ottimale? Quale è il livello* α *ottimale?;*

Riarrangiando il vincolo di partecipazione otteniamo

$$\begin{aligned}
\alpha &= -\beta e+\frac{1}{2}\beta^2 e^2 v+e^2\\
&= -\beta\frac{\beta}{(\beta^2 v+2)}+\frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\beta^2 v+2}\right)^2\beta^2 v+\left(\frac{\beta}{\beta^2 v+2}\right)^2\\
&= \beta\frac{\beta}{(\beta^2 v+2)}\left[-1+\frac{1}{2}\frac{\beta^2 v}{\beta^2 v+2}+\frac{1}{\beta^2 v+2}\right]\\
&= \beta\frac{\beta}{(\beta^2 v+2)}\left[-1+\frac{\beta^2 v+2}{2(\beta^2 v+2)}\right]\\
&= \beta\frac{\beta}{(\beta^2 v+2)}\left[\frac{-2\beta^2 v-4+\beta^2 v+2}{2(\beta^2 v+2)}\right]\\
&= \beta\frac{\beta}{(\beta^2 v+2)}\left[\frac{-\beta^2 v-2}{2(\beta^2 v+2)}\right]\\
&= -\beta\frac{\beta}{(\beta^2 v+2)}\left[\frac{\beta^2 v+2}{2(\beta^2 v+2)}\right]\\
&= -\frac{\beta^2}{2(\beta^2 v+2)}
\end{aligned}$$

Il valore ottimo $\alpha^*=-\frac{\beta^2}{2(\beta^2 v+2)}<0$ sempre.

l) Quale sarà il livello dei profitti? Distinguete tra la parte variabile dei profitti e la parte fissa

profitti dell'impresa sono ottenuti sostituendo i valori ottimi per β e α nella funzione dei profitti attesi:

$$E(\Pi)=pE(x(\alpha_i^*,\beta_i^*))-E(w(\alpha_i^*,\beta_i^*))=40e-\alpha_i^*-\beta_i^* e$$

I valori ottimi di β e α nel primo caso sono dei valori certi, nel secondo dipendono dalla propensione al rischio (λ) e dalla componente aleatoria della retribuzione (la sua varianza).Maggiore è λ maggiore è l'avversione dell'individuo alla volatilità della retribuzione.